Rencana Pembelajaran

Learning Outcome

Setelah mengikuti proses pembelajaran ini, diharapkan mahasiswa dapat

1) Menentukan nilai turunan suatu fungsi di suatu titik
2) Menentukan nilai koefisien fungsi sehingga fungsi tersebut diferensiabel di suatu titik
3) Menyelesaikan turunan suatu fungsi menggunakan aturan rantai
4) Menentukan nilai turunan tingkat tinggi dari suatu fungsi di suatu titik
5) Menentukan turunan fungsi implisit
6) Menentukan selang kemonotonan, dan titik ekstrim dan jenisnya dari suatu kurva
7) Menentukan selang kecekungan dan titik belok dari suautu kurva
8) Menentukan asymtot suatu kurva
9) Menggambarkan grafik suatu fungsi
10) Menyelesaikan limit bentuk tak tentu

Prasyarat

Pokok bahasan yang harus dipelajari oleh mahasiswa sebelum mengikuti perkuliahan integral dan penerapannya, adalah

- **Fungsi Real:** Sistem Bilangan Real, Fungsi dan Grafik, Limit dan kekontinuan, Limit tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

Referensi

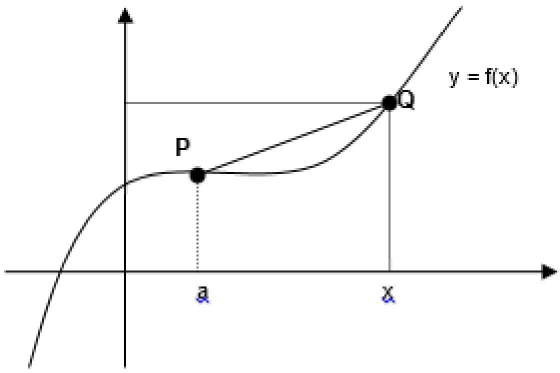
Untuk mendukung dan mempermudah dalam mempelajari materi integral dan penggunaannya, disarankan untuk menggunakan buku berikut

- Mursita, Danang. (2010). Matematika untuk Perguruan Tinggi. Rekayasa Sains. Bandung. http://biobses.com/judul-buku,300-matematika_untuk_perguruan_tinggi.html
- Turunan dan penggunaan, http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/1.-differentiation/

1 Pengertian Turunan

Misal diberikan grafik fungsi *y = f(x)* dengan *P(a, b)* merupakan titik tetap yang terletak pada kurva *y = f(x)*. Bila titik *Q(x,y)* merupakan titik sembarang pada kurva *y = f(x)* maka dapat dibuat garis yang menghubungkan titik *P* dan titik *Q* (misal dinamakan garis *PQ*), seperti terlihat pada Gambar 1 berikut. Gradien garis *PQ* dapat dinyatakan dengan,

$$m_{PQ} = \frac{y-b}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$



Gambar 1

Bila titik *Q* digerakkan sehingga berimpit dengan titik *P* maka *x* akan mendekati *a* $(x - a \to 0)$ dan *f(x)* mendekati *f(a)* $(f(x) - f(a) \to 0)$ serta garis *PQ* akan merupakan garis singgung kurva *f(x)* di titik *P*. Adapun gradien garis singgung *PQ* dinyatakan dengan, $m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. **Mengapa gradient garis singgung *PQ* dapat dinyatakan dengan notasi limit? Jelaskan**.

Turunan dari fungsi *f(x)* di titik *x = a* didefinisikan sebagai gradien dari garis singgung kurva *f(x)* di *x = a* dan diberikan, $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Bila nilai limit ada maka *f(x)* dikatakan **diferensiabel** atau **dapat diturunkan** di *x = a*. Misal *h = x - a* . Maka turunan *f(x)* di *x = a* dapat dituliskan, $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$. Notasi lain yang digunakan untuk menyatakan turunan adalah $f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = \frac{dy(a)}{dx} = y'(a)$.

Secara fisis, pengertian atau definisi dari turunan fungsi *f(x)* di titik *x = a* menyatakan kecepatan, *V(x)* benda yang bergerak dengan lintasan *f(x)* pada saat *x = a*. Oleh karena itu, didapatkan hubungan $V(a) = f'(a)$ dan percepatan, *A(x)* , $A(a) = \frac{dV(a)}{dx}$.

Bila *y = f(x)* diferensiabel di *x = a* maka *y = f(x)* kontinu di *x = a*. Teorema atau sifat ini tidak berlaku sebaliknya, yaitu ada fungsi yang kontinu tetapi tidak diferensiabel. **Bagaimana anda mendapatkan sebuah fungsi kontinu tetapi tidak diferensiabel di suatu nilai *x*?**

Sebagaimana pengertian dari keberadaan limit fungsi (limit kiri = limit kanan) dan kekontinuan fungsi (kontinu kanan = kontinu kiri), dapat juga diturunkan suatu pengertian diferensiabel kanan dan diferensiabel kiri. Misal fungsi *f(x)* diferensiabel di *x = a*, maka dapat didefinisikan (1) **Diferensiabel Kanan**, $f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ dan (2) **Diferensiabel Kiri**, $f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Kekontinuan suatu fungsi merupakan syarat perlu dari suatu fungsi yang diferensiabel. Artinya untuk menunjukkan bahwa suatu fungsi diferensiabel di suatu titik maka fungsi tersebut harus kontinu di titik tersebut. Selanjutnya diperiksa apakah nilai diferensiabel kanan sama dengan diferensiabel kiri. Jadi syarat yang harus dipenuhi agar fungsi *f(x)* diferensiabel di $x = a$ adalah (1) Fungsi *f(x)* kontinu di $x = a$, yaitu $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ dan (2) Turunan kiri di $x = a$ sama dengan turunan kanan di $x = a$, yaitu $f_+^{'}(a) = f_-^{'}(a)$. Misalkan fungsi *f(x)* kontinu di $x = a$ dan kedua limit berikut ada, $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ dan $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Fungsi *f(x)* diferensiabel di $x = a$ bila dan hanya bila nilai kedua limit ada. Selanjutnya nilai turunan dari fungsi *f(x)* di $x = a$ dinyatakan dengan $f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

.

Bagaimana cara menentukan nilai a dan b agar fungsi $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & , x \le 1 \\ ax + b & , x > 1 \end{cases}$ **diferensiabel di $x = 1$? Kemudian tentukan nilai** $f'(1)$**.**

1.1 Rumus Turunan

Untuk menentukan turunan suatu fungsi sangat sulit bilamana harus digunakan definisi formal di atas, namun akan lebih mudah digunakan rumus sebagai berikut. **Selanjutnya tugas Anda adalah membuat contoh soal yang dipakai untuk menerapkan rumusan tersebut.**

1. $\frac{d(x^r)}{dx} = r x^{r-1}$; $r \in \Re$
2. $\frac{d(f(x)+g(x))}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} + \frac{d(g(x))}{dx}$
3. $\frac{d(f(x)g(x))}{dx} = g(x)\frac{d(f(x))}{dx} + f(x)\frac{d(g(x))}{dx}$
4. $\frac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx} = \frac{g(x)d(f(x)) - f(x)d(g(x))}{g^2(x)}$

1.2 Turunan Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri (sinus dan cosinus) merupakan fungsi kontinu, sehingga limit fungsi sinus dan cosinus di setiap titik sama dengan nilai fungsinya, yaitu $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \quad dan \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$. Turunan dari fungsi sinus dan fungsi cosinus adalah $f'(\sin x) = \cos x$ dan $f'(\cos x) = -\sin x$. **Bagaimanakah cara Anda mendapatkan rumus turunan tersebut dengan menggunakan definisi fungsi trigonometri, identitas trigonometri dan limit fungsi sinus dan limit fungsi cosinus?** Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan, diberikan berikut. Lantas, **Bagaimana detail cara mendapatkannya, supaya tidak masuk ke hafalan semata?**

1. $\dfrac{d(\tan x)}{dx} = \dfrac{d\left(\sin x / \cos x\right)}{dx} = \sec^2 x$
2. $\dfrac{d(\cot x)}{dx} = \dfrac{d\left(\cos x / \sin x\right)}{dx} = -\csc^2 x$
3. $\dfrac{d(\sec x)}{dx} = \dfrac{d\left(1 / \cos x\right)}{dx} = \sec x \tan x$
4. $\dfrac{d(\csc x)}{dx} = \dfrac{d\left(1 / \sin x\right)}{dx} = -\csc x \cot x$

Gambaran sekilas tentang bagaimana mendapatkan turunan dari fungsi $f(x) = \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ diberikan berikut. Misalkan *u(x)* = 1 – *sin x* dan *v(x)* = *cos x*, maka turunan dari kedua fungsi berturut-turut adalah *u'(x)* = - *cos x* dan *v'(x)* = - *sin x*. Dengan menggunakan rumus turunan $f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ maka didapatkan turunan dari *f(x)*,

$$f'(x) = \frac{(-\cos x)\cos x - (-\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}.$$

Bila kita hitung nilai turunan fungsi turunan dari fungsi *f(x)* di $x = \dfrac{\pi}{6}$ maka diperoleh Jawab :

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin \pi/6 - 1}{\cos^2 \pi/6} = \frac{1/2 - 1}{3/4} = -\frac{2}{3}.$$

Untuk menentukan / menghitung limit fungsi trigonometri di tak hingga dan limit tak hingga, digunakan sifat atau teorema apit berikut. Misal $f(x) \le g(x) \le h(x)$ berlaku untuk setiap *x* di dalam domainnya. Bila $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L$ maka $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$. Diberikan $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$. Misal $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Dari $-1 \le \sin x \le 1$ maka $\dfrac{-1}{x} \le \dfrac{\sin x}{x} \le \dfrac{1}{x}$. Karena $\lim_{x\to\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ maka dengan menggunakan teorema apit diperoleh $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. **Bagaimana cara menghitung** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$**?**

1.3 Teorema Rantai

Untuk mendapatkan turunan dari fungsi komposisi dapat dilakukan dengan cara mencari bentuk ekplisit dari hasil komposisi fungsi. Namun dapat juga dicari dengan cara langsung menggunakan metode atau aturan rantai. Misal diberikan fungsi komposisi $y = f(u(x))$, maka turunan pertama terhadap x yaitu $\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(u(x)))}{du(x)}\frac{d(u(x))}{dx} = f'(u(x))u'(x)$. Bila *y* = *f(u)* dengan *u* = *v(x)* maka turunan pertama dari *y* terhadap *x* dicari $\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(u))}{du}\frac{d(u(v))}{dv}\frac{d(v(x))}{dx} = f'(u)\,u'(v)\,v'(x)$. Metode penurunan ini dikenal dengan nama teorema rantai. Untuk mendapatkan turunan dari fungsi $y = \sin(3x)$ dilakukan berikut. Misal *f(x)* = sin *x* dan *u(x)* = 3*x*, maka fungsi *y* merupakan komposisi dari fungsi *f(x)* dan fungsi *u(x)*, yaitu *y* = *(f o u) (x)*. Turunan terhadap *x* dari fungsi *f(x)* dan *u(x)* berturut-turut adalah *f'(x) = cos x* dan *u'(x)* = 3 sehingga diperoleh : $\frac{dy}{dx} = f'(u)u'(x) = 3\cos(3x)$. **Bagaimana cara yang Anda lakukan untuk mencari nilai turunan pertama di *x* = 1 dari fungsi** $y = \tan\sqrt{\pi^2 x}$ **?**

1.4 Turunan Tingkat Tinggi

Turunan kedua dari fungsi *f(x)* didapatkan dengan menurunkan sekali lagi bentuk turunan pertama. Demikian seterusnya untuk turunan ke-*n* didapatkan dari penurunan bentuk turunan ke-(*n* -1),

1) Turunan pertama, $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$
2) Turunan kedua, $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$
3) Turunan ketiga, $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ …

(*n*) Turunan ke-*n*, $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Penerapan dari turunan tingkat tinggi terhadap fungsi $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ sebagai berikut. Turunan pertama, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Turunan kedua digunakan rumus turunan dari fungsi hasilbagi, $f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ dan $f'''(x) = \frac{-3x}{(1+x^2)^{5/2}}$ (**Bagaimana detail pengerjaan detail dari turunan kedua dan ketiga?**)Fungsi Implisit

Fungsi dengan notasi $y = f(x)$ disebut **fungsi eksplisit**, yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan **fungsi implisit**. Notasi yang biasa digunakan untuk menyatakan fungsi implisit adalah $F(x,y) = k$ dengan k merupakan bilangan real.

Dalam menentukan turunan fungsi implisit bila mungkin dan mudah untuk dikerjakan, dapat dinyatakan secara eksplisit terlebih dahulu kemudian ditentukan turunannya. Namun tidak semua fungsi implisit dapat diubah menjadi bentuk eksplisit, oleh karena itu akan dibahas cara menurunkan fungsi dalam bentuk implisit berikut. **Nyatakan fungsi implisit $y-4x+2xy=5$ ke dalam bentuk eksplisit, $y = f(x)$, selanjutnya gunakan rumus turunan untuk mendapatkan turunan pertama dari fungsi tersebut**. Fungsi implisit dapat dinyatakan secara eksplit, dalam $x = f(y)$, seperti $y-4x+2xy^2=-3$. **Selanjutnya, carilah turunan pertama dari fungsi tersebut**. Beberapa fungsi implisit tidak dapat dinyatakan secara eksplisit, seperti $y-4x+2x^2y^2=-3$. Turunan dari fungsi ini dicari dengan menggunakan metode penurunan fungsi implisit. Misal turunan dari x dan y berturut-turut dinyatakan dengan dx dan dy. Bila dalam satu suku terdapat dua peubah (x dan y) maka kita lakukan penurunan secara bergantian, bisa terhadap x dahulu baru terhadap y atau sebaliknya. Hasil turunan $\frac{dy}{dx}$ akan nampak bila masing-masing ruas dibagi oleh dx.

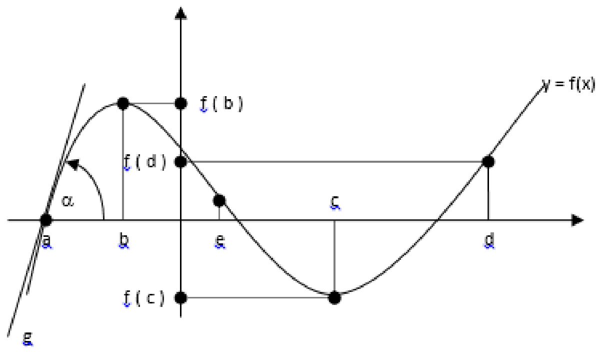
$$y-4x+2x^2y^2=-3 \Leftrightarrow \; dy-4dx+4x\,y^2\,dx+4x^2\,y\,dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}-4+4x\,y^2+4x^2\,y\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{(ruas kiri dan ruas kanan dibagi dengan } dx\text{)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4-4x\,y^2}{1+4x^2y}$$

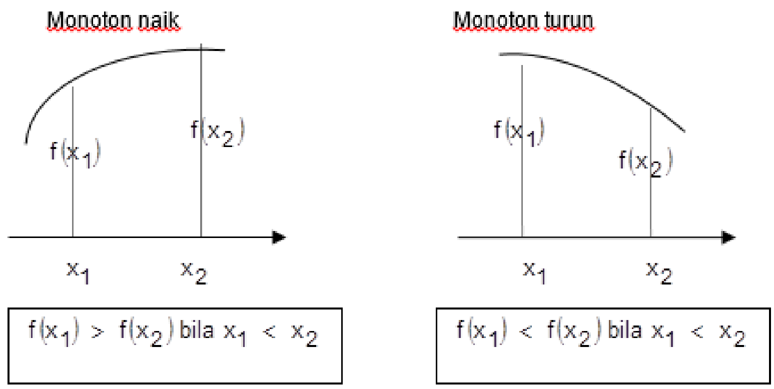
1.5 Kemonotonan Kurva

Kemonotonan dari suatu kurva dibedakan menjadi dua yaitu monoton naik dan monoton turun. Pengertian monoton diijelaskan secara ilustrasi melalui Gambar 3. Grafik fungsi dikatakan $y = f(x)$ monoton naik bila seseorang menyusuri kurva dari arah kiri ke kanan dengan mendaki, sedangkan untuk menoton turun bila seseorang menyusuri kurva dari arah kiri ke kanan dengan menurun. Dari Gambar 2, diperlihatkan bahwa grafik fungsi $y = f(x)$ monoton naik pada selang / interval (a, b) atau (c, d), sedangkan grafik fungsi $y = f(x)$ monoton turun pada selang / interval (b, c).



Gambar 2

Misal diberikan kurva *y = f(x)* dan selang / interval I yang terletak pada domain dari *y = f(x)*. Maka (1) Grafik fungsi *f(x)* dikatakan **Monoton naik** pada selang / interval I bila $f(x_1) > f(x_2)$ untuk $x_1 > x_2; x_1, x_2 \in I$ dan (2) Grafik fungsi *f(x)* dikatakan **Monoton turun** pada selang / interval I bila $f(x_1) < f(x_2)$ untuk $x_1 > x_2; x_1, x_2 \in I$.



Gambar 3

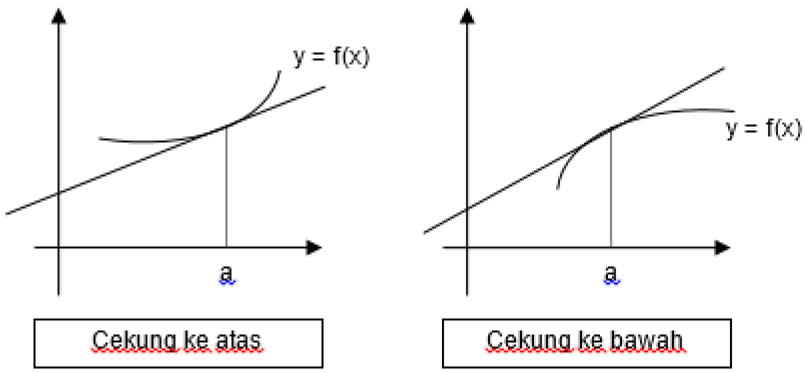
Dalam menentukan selang / interval fungsi monoton naik atau fungsi monoton turun digunakan pengertian secara geometris berikut. Gradien dari suatu garis didefinisikan sebagai tangen sudut (α) yang dibentuk oleh garis tersebut dengan sumbu X positif, m = tan α. Perhatikan Gambar 2, garis g merupakan garis singgung kurva *y = f(x)* di $x = a$. Bila sudut lancip ($\alpha < ½\ \pi$) maka $m > 0$ dan $m < 0$ untuk sudut tumpul ($\alpha > ½\ \pi$). Karena gradien garis singgung suatu kurva *y = f(x)* di titik (*x,y*) diberikan dengan $m = f\,'(x)$ dan selang / interval fungsi monoton naik atau fungsi monoton turun berturut-turut ditentukan dari nilai gradiennya, maka kemonotonan fungsi diberikan berikut :

1. Fungsi *f(x)* monoton naik pada selang / interval I bila $f'(x) > 0$ untuk $x \in$ I
2. Fungsi *f(x)* monoton turun pada selang / interval I bila $f'(x) < 0$ untuk $x \in$ I

Selang / interval fungsi kemonotonan dari fungsi $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 2x$ dapat dicari dengan menentukan nilai pembuat nol dari turunan pertama. Selanjutnya dari nilai di tiap selang akan dapat ditentukan fungsi monoton turun dan monoton naik. **Bagaimana penyelesaian detail dari masalah ini?**

1.6 Kecekungan Kurva

Secara geometris, grafik fungsi $y = f(x)$ dikatakan cekung ke bawah di suatu titik bila kurva terletak di bawah garis singgung kurva yang melalui titik tersebut. Sedangkan grafik fungsi $y = f(x)$ dikatakan cekung ke atas di suatu titik bila kurva terletak di atas garis singgung yang melalui titik tersebut. Dari Gambar 4, nampak kurva $y = f(x)$ akan cekung ke bawah pada selang / interval (a,e) dan akan cekung ke atas pada selang / interval (e,d). Gambar 4 menunjukkan kecekungan kurva $y = f(x)$ di titik $x = a$.



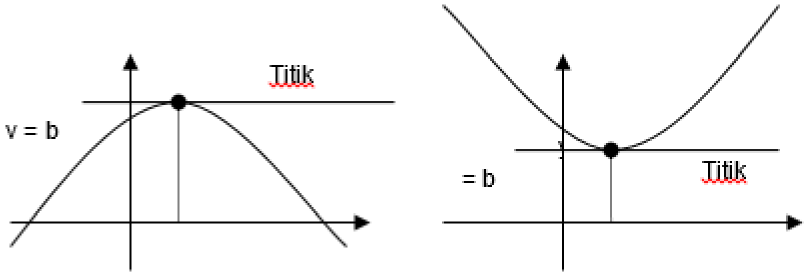
Gambar 4

Misal diberikan fungsi $f(x)$ dan selang / interval I yang terletak pada domain dari fungsi $f(x)$. Maka (1) Fungsi $f(x)$ dikatakan **cekung ke atas** pada selang / interval I bila fungsi $f'(x)$ monoton naik pada selang / interval I dan (2) Fungsi $f(x)$ dikatakan **cekung ke bawah** pada selang / interval I bila fungsi $f'(x)$ monoton turun pada selang / interval I. Dari pengertian kemonotonan, fungsi $f(x)$ monoton naik pada selang / interval I bila berlaku $f'(x) > 0$ untuk $x \in I$ dan fungsi $f(x)$ monoton turun pada selang / interval I bila $f'(x) < 0$ untuk $x \in I$. sehingga bila $f'(x)$ naik maka akan berlaku $f''(x) > 0$ dan bila $f'(x)$ turun maka akan berlaku $f''(x) < 0$. Oleh karena itu dapat disimpulkan tentang kecekungan fungsi menggunakan pengertian kemonotonan dan definisi kecekungan sebagai berikut, (1) Bila $f''(x) > 0, x \in I$ maka $f(x)$ cekung ke atas pada selang / interval I dan (2) Bila $f''(x) < 0, x \in I$ maka $f(x)$ cekung ke bawah pada selang / interval I.

Selang / interval kecekungan dari fungsi, $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x}$ dicari dengan menentukan turunan pertama dan turuna kedua dari $f(x)$. **Carilah turunan tersebut**. Fungsi cekung ke atas, bila $f''(x) > 0$. **Bagaimana Anda menentukan selang tersebut?**

1.7 Nilai Ekstrim

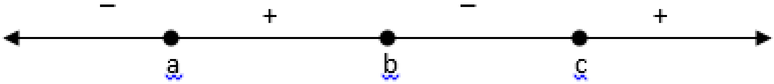
Nilai ekstrim dari suatu fungsi *f(x)* yang dimaksud pada pembahasan disini merupakan nilai ekstrim relatif (bukan absolut). Nilai ekstrim dibedakan menjadi dua yaitu (1) Nilai Ekstrim Maksimum dan (2) Nilai ekstrim Minimum. Misal diberikan kurva *f(x)* dan titik (*a*,*b*) merupakan titik ekstrim (titik maksimum atau minimum) seperti terlihat pada Gambar 5, maka garis singgung kurva di titik (*a*,*b*) akan sejajar sumbu X atau mempunyai gradien *m* = 0, yaitu garis y = b. Sehingga syarat perlu bahwa suatu fungsi *f(x)* akan mencapai nilai ekstrim di *x* = *a* adalah *f '(a)* = 0. Titik (a, b) disebut **titik ekstrim**, nilai *x* = *a* disebut **nilai stasioner**, sedangkan nilai y = b disebut **nilai ekstrim**. Dari Gambar 2, diperlihatkan bahwa di *x* = *b* dan *x* = *c*, fungsi *y* = *f(x)* mencapai nilai ekstrim.



Gambar 5

Misal diberikan fungsi *y* = *f(x)* dan selang / interval I yang memuat *x* = *a*. Maka (1) Nilai *f(a)* disebut **nilai (ekstrim) maksimum** pada selang / interval I bila *f(a)* > *f(x)* untuk setiap $x \in$ I. Titik dengan koordinat (*a*, *f(a)*) dinamakan titik maksimum dari fungsi *y* = *f(x)* dan (2) Nilai *f(a)* disebut **nilai (ekstrim) minimum** pada selang / interval I bila *f(a)* < *f(x)* untuk setiap $x \in$ I. Titik dengan koordinat (*a*, *f(a)*) dinamakan titik minimum dari fungsi *y* = *f(x)*.

Secara geometris, untuk menentukan apakah di nilai x, fungsi *f(x)* mencapai nilai ekstrim, dapat dilihat dari selang / interval kemonotonan fungsi. Bila di nilai *x* tersebut terjadi perubahan kemonotonan maka fungsi akan mencapai nilai ekstrim di nilai *x* tersebut. Perhatikan Gambar 6. Misal nilai *x* = *a*, *x* = *b* dan *x* = *c* berturut merupakan nilai stationer, yaitu *f '(a)* = *f '(b)* = *f '(c)* = 0. Karena terjadi perubahan kemonotonan di *x* = *a*, *x* = *b*, dan *x* = *c* maka *f(a)*, *f(b)* dan *f (c)* merupakan titik ekstrim. Jenis dari titik ekstrim dapat ditentukan dari perubahan kemontonan.



Gambar 6

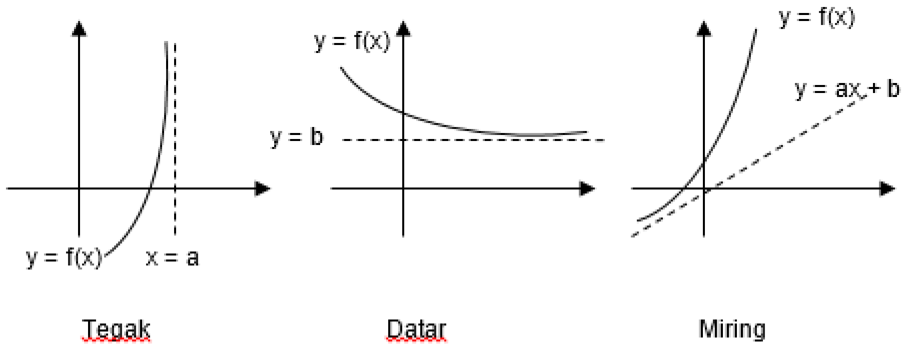
Untuk menentukan jenis nilai ekstrim (maksimum atau minimum) dari fungsi *f(x)* dapat dilakukan dengan Uji turunan kedua sebagai berikut, (1) Tentukan turunan pertama dan kedua, $f'(x)$ dan $f''(x)$, (2) Tentukan titik stasioner yaitu pembuat nol dari turunan pertama $\left(f'(x)=0\right)$, misalkan nilai stasioner adalah *x* = *a* dan (3) Nilai *f(a)* merupakan nilai maksimum bila $f''(a)<0$, sedangkan nilai *f(a)* merupakan nilai minimum bila $f''(a)>0$. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 5$ adalah $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$. Nilai stasioner dari *f(x)* terjadi pada saat *f " (x)* = 0 yaitu di *x* = -1, *x* = - ½ dan *x* = 0. Turunan kedua dari *f(x)*, $f''(x) = 12x^2 + 12x + 2$. Dengan menguji nilai turunan kedua, *f "(x)* di *x* = -1, *x* = - ½ dan *x* = 0 maka akan diperoleh jenis nilai ekstrim fungsi tersebut. **Tentukan jenis dan nilai ekstrim fungsi tersebut.**

1.8 Titik Belok

Misal diberikan fungsi *y = f(x)* maka syarat perlu agar *x = b* merupakan absis dari titik belok dari fungsi *f(x)* bila berlaku (1) $f''(b) = 0$ atau (2) *f(x)* tidak diferensiabel dua kali di *x = b*. Kata " syarat perlu " mirip artinya dengan kata "calon", maksudnya bahwa untuk nilai *x = b* yang dipenuhi oleh salah satu dari kedua syarat itu memungkinkan untuk menjadi absis titik belok bergantung apakah dipenuhi syarat seperti berikut. Misal *f(x)* kontinu di *x = b*. Maka (*b* , *f(b)*) disebut **titik belok** dari kurva *f(x)* bila terjadi perubahan kecekungan di *x = b*, yaitu di satu sisi dari *x = b* cekung ke atas dan disisi lain cekung ke bawah atau sebaliknya. Titik belok dari fungsi $f(x) = 2x^3 - 1$ terjadi di *x* = 0 (**kerjakan secara detail**) dan fungsi $f(x) = x^4$ tidak mempunyai titik belok. **Mengapa? Jelaskan** .

1.9 Asymtot

Asymtot suatu grafik fungsi didefinisikan sebagai garis yang didekati oleh suatu kurva. Asymtot dibedakan menjadi tiga yaitu (1) Asymtot tegak *x = a*, (2) Asymtot datar, *y = b* dan (3) Asymtot miring, *y = ax + b*. Gambar 7 merupakan contoh dari ketiga asymtot tersebut.



Gambar 7

Misal diberikan kurva *y = f (x)*, maka garis *y = b* disebut **asymtot datar** dari *y = f (x)* dengan syarat (1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ atau (2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$. Untuk mendapatkan asymtot datar dari sebuah kurva maka dilakukan perhitungan limit fungsi untuk *x* → ∞ dan untuk *x* → - ∞. Sedangkan garis *x = a* disebut **asymtot tegak** bila berlaku salah satu dari (1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ (2) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ (3) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ (4) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$. Garis *y = a x + b* dikatakan sebagai

asymtot miring dari *y* = *f(x)* bila berlaku (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ atau (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$. Untuk mendapatkan asymtot miring dari fungsi rasional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ [pangkat *P(x)* = 1 + pangkat *Q(x)*] dilakukan dengan cara membagi *P(x)* dengan *Q(x)* sehingga hasilbagi yang didapatkan merupakan asymtot miring dari *f(x)*.

Misal diberikan fungsi $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$. Dari nilai *x* yang memenuhi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ atau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ akan diperoleh asymtot miring. Selanjutnya, bila nilai $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ maka akan diperoleh asymtot datar. **Bagaimana Anda mendapatkan kedua asymtot tersebut? Apakah asymtot datar dan asymtot miring bisa terjadi secara bersama-sama? Jelaskan. Apakah syarat dari sebuah fungsi agar terjadi asymtot datar atau asymtot miring? Jelaskan.**

1.10 Grafik Fungsi

Dalam mengambarkan grafik suatu kurva dapat dilakukan dengan menentukan terlebih dahulu (1) Selang / interval kemonotonan, (2) Selang / interval kecekungan, (3) Titik ekstrim dan jenisnya, (4) Titik potong terhadap salib sumbu (sumbu X dan sumbu Y), (5) Titik belok (bila ada), (6) Semua asymtot (bila ada) dan (7) Titik lain (sembarang) yang dapat membantu memudahkan menggambarkan grafik. **Bila diberikan fungsi $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$, gambarkan grafik fungsi tersebut dengan cara mengikuti langkah (1) sd (7).**

1.11 Dalil Delhopital

Penerapan dari turunan pertama dilakukan untuk menghitung limit fungsi. Dalam perhitungan limit fungsi seringkali dijumpai bentuk tak tentu dari limit yaitu : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \text{dan} \infty-\infty$. Untuk menyelesaikannya digunakan cara yang dikenalkan oleh Delhopital.

Bentuk $\frac{0}{0}$ *dan* $\frac{\infty}{\infty}$. Misal lim *f(x)* = lim *g(x)* = 0 atau lim *f(x)* = lim *g(x)* = ∞. Maka $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Bila masih dijumpai ruas kanan merupakan bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ maka dilakukan penurunan lagi sehingga didapatkan nilai yang bukan merupakan bentuk tak tentu tersebut. Penulisan lim di atas mengandung maksud $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^+}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ atau $\lim\limits_{x\to\infty}$.

Bentuk 0.∞. Misal lim *f(x)* = 0 dan lim *g(x)* = ∞. Maka lim *f(x) g(x)* merupakan bentuk 0.∞ .

Untuk menyelesaikannya kita ubah menjadi bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ yaitu : $\lim f(x)g(x) = \lim \frac{f(x)}{1/g(x)} = \lim \frac{g(x)}{1/f(x)}$. Selanjutnya solusi dari limit tersebut diselesaikan dengan cara seperti bentuk sebelumnya. Bentuk ∞ - ∞. Misal lim *f(x)* = lim *g(x)* = ∞. Maka untuk menyelesaikan lim [*f(x)* - *g(x)*] dilakukan dengan menyederhanakan bentuk [*f(x)* - *g(x)*] sehingga dapat dikerjakan menggunakan cara yang telah dikenal sebelumnya.

Catatan khusus, tidak semua bentuk limit tak tentu dapat diselesaikan menggunakan dalil Delhopital. Hal ini seringkali terjadi di dalam menyelesaikan limit fungsi *f(x)* dengan *f(x)* bukan merupakan fungsi rasional. Untuk permasalahan yang terakhir, dapat dilihat dari limit berikut, (1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-3x}}{1-x}$ dan (2) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$. Bentuk limit (1) merupakan bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$ namun tidak dapat diterapkan dalil delhopital. **Mengapa? Jelaskan**. Penyelesaian limit demikian digunakan bantuan sifat dari nilai mutlak, yaitu $|x| = \begin{cases} x & ,x \geq 0 \\ -x & ,x < 0 \end{cases}$ dan $|x| = \sqrt{x^2}$. Tanda $x \to -\infty$ berarti bahwa x < 0 sehingga bentuk tak hingga yang digunakan adalah $|x| = -x$ dan $|x| = \sqrt{x^2}$. **Bagaimana selengkapnya penyelesaian masalah ini?** Limit (2) mempunyai bentuk tak tentu $\infty - \infty$. Untuk menyelesaikannya dilakukan dengan mengalikan dan membagi sekawan yaitu $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}$. Dengan menggunakan bantuan definisi nilai mutlak $|x| = x$ dan $|x| = \sqrt{x^2}$ (sebab $x \to \infty$), **bagaimana menyelesaikan limit tersebut?**