Rencana Pembelajaran

Learning Outcome

Setelah mengikuti proses pembelajaran ini, diharapkan mahasiswa dapat

1) Menentukan anti turunan dari sebuah fungsi
2) Menyelesaikan integral tentu dengan integrasi ke-x dan integrasi ke-y.
3) Menghitung luas daerah dengan menggunakan integral tentu dengan integrasi ke-x dan integrasi ke-y.
4) Menghitung luas daerah yang dibatasi oleh dua buah kurva dengan menggunakan integral tentu.
5) Menghitung volume benda putar dengan sumbu putar merupakan salib sumbu menggunakan metode kulit tabung dan metode cakram
6) Menghitung volume benda putar dengan sumbu putar garis yang sejajar dengan salib sumbu menggunakan metode kulit tabung dam metode cakram

Prasyarat

Pokok bahasan yang harus dipelajari oleh mahasiswa sebelum mengikuti perkuliahan integral dan penerapannya, adalah

- **Fungsi Real:** Sistem Bilangan Real, Fungsi dan Grafik, Limit dan kekontinuan, Limit tak Hingga dan Limit di Tak Hingga
- **Turunan dan Penggunaan:** Turunan Fungsi, Turunan Fungsi Trigonometri, Teorema Rantai, Turunan Tingkat Tinggi, Fungsi Implisit, Kemonotonan dan Kecekungan Fungsi, Nilai Ekstrim dan Asymtot, Dalil Delhopital

Referensi

Untuk mendukung dan mempermudah dalam mempelajari materi integral dan penggunaannya, disarankan untuk menggunakan buku berikut

- Mursita, Danang. (2011). Matematika untuk Perguruan Tinggi. Rekayasa Sains. Bandung. http://biobses.com/judul-buku,300-matematika_untuk_perguruan_tinggi.html
- Holdbrook, Jerita. Calculus at Work. Chapter 7 Applications of Definite Integrals.
- Integral Tentu http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/unit-3-the-definite-integral-and-its-applications/

1 Integral Tak Tentu

Misal diberikan fungsi $F(x) = x^2$, maka turunan dari fungsi F(x) dinyatakan dengan $\frac{F(x)}{dx} = F'(x) = f(x) = 2x$. Fungsi $f(x) = 2x$ dikatakan sebagai anti turunan dari fungsi $F(x) = x^2$. **Bagaimana cara anda menjelaskan bahwa fungsi $f(x) = 2x$ juga merupakan anti turunan dari fungsi berikut: $F(x) = x^2 + 2$, $F(x) = x^2 - 3$, dan $F(x) = x^2 + \frac{1}{2}$?** Secara umum, dapat dikatakan bahwa fungsi $F(x) = x^2 + C$ merupakan anti turunan dari fungsi $F'(x) = f(x) = 2x$ dengan C merupakan merupakan sembarang konstanta (bilangan real).

Perhatikan definisi berikut. Fungsi $F(x)$ disebut **anti turunan** dari $f(x)$ bila $F'(x) = f(x)$. Proses mencari anti turunan disebut **integrasi (integral).** Notasi yang digunakan untuk menyatakan integral dari fungsi $f(x) = 2x$ adalah $\int 2x\,dx = x^2 + C$. Secara umum dapat dituliskan $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ dengan $F'(x) = f(x)$. Bentuk integral ini disebut **integral tak tentu**.

Lantas, bagaimana cara kita menyelesaikan integral berikut, $\int x^2\,dx$? Perhatikan fungsi $F(x) = A\,x^n + C$ dengan n dan C merupakan bilangan real. Turunan dari fungsi $F(x) = A\,x^n + C$ adalah $F'(x) = A\,n\,x^{n-1}$. Dengan menggunakan notasi integral maka diperoleh,

$$\int A\,n\,x^{n-1}\,dx = A\,x^n + C$$

Kalau kita ingin menyelesaikan integral $\int x^2\,dx$ maka kita bandingkan dengan integral di atas, $\int A\,n\,x^{n-1}\,dx$,

$$\int x^2\,dx = \int A\,n\,x^{n-1}\,dx$$

Diperoleh, 2 = n -1 atau n = 3 dan An = 1, sehingga $A = \frac{1}{3}$. Jadi, $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$.

Secara umum, dapat dituliskan rumusan, $\int x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}x^n + C$ atau dapat juga dituliskan menjadi,

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Sebab n adalah bilangan real, maka dapat dipilih n = -1. Tetapi, rumusan tersebut menjadi tidak terdefinisi, **mengapa? Jelaskan.** Agar rumusan itu berlaku atau benar, maka nilai n = -1 harus dikeluarkan, sehingga rumusan menjadi,

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\,, n \neq -1$$

Bila diminta menyelesaikan integral $\int 5\,x^2\,dx$ maka menggunakan uraian di atas diperoleh 2 = n – 1 atau n = 3 dan An = 3A = 5 atau $A = \frac{5}{3}$, sehingga $\int 5\,x^2\,dx = \frac{5}{3}x^3 + C$. Secara umum, dapat diperoleh rumusan,

$$\int A\,x^n\,dx = \frac{A}{n+1}x^{n+1} + C\,, n \neq -1$$

Rumusan di atas dapat digunakan untuk menyelesaikan integral berikut, $\int \left[x^3 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2\right] dx$. Bentuk integral tersebut diselesaikan,

$$\int \left[x^3 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2\right] dx = \int \left[x^3 - 2x + 3x^{-1/2} + 2\right] dx$$
$$= \int x^3\, dx - \int 2x\, dx + \int 3\, x^{-1/2}\, dx + \int 2\, dx$$
$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{1/2}x^{1/2} + 2x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{2}x^2 + 6\, x^{1/2} + 2x$$

Bagaimana anda menyelesaikan integral, $\int x\,\sqrt{x}\, dx$? Selanjutnya, tuliskan kembali turunan dari fungsi trigonometri berikut, $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f(x) = \sec x, f(x) = \csc x, f(x) = \tan x,$ dan $f(x) = \cot x$, kemudian nyatakan anti turunan dari fungsi trigonometri tersebut dengan menggunakan notasi integral. Misalkan turunan fungsi $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$, maka diperoleh, $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

Bila diberikan fungsi komposisi, $f[g(x)]$, maka turunannya adalah $\frac{d[f(g(x))]}{dx} = g'(x)\, f'(g(x))$. Misal diberikan fungsi $y = \sin(x^2)$. Bila dinyatakan dalam bentuk fungsi komposisi, $y = f(g(x))$, maka diperoleh $f(g(x)) = \sin(g(x))$ dan $g(x) = x^2$, sehingga turunannya adalah $\frac{d[f(g(x))]}{dx} = \frac{d[sin(x^2)]}{dx} = (2x)\cos(x^2)$. Dalam notasi integral dapat dituliskan, $\int 2x\cos(x^2)\, dx = \sin(x^2)$ + C. Jadi secara umum, dapat diperoleh rumusan,

$$\int g'(x)\, f(g(x))\, dx = F(g(x)) + C$$

dengan $F'(x) = f(x)$

Misalkan $g(x) = u$, maka $g'(x) = \frac{du}{dx}$ atau $g'(x)dx = du$. Sehingga bentuk integral di atas dapat dituliskan sebagai berikut,

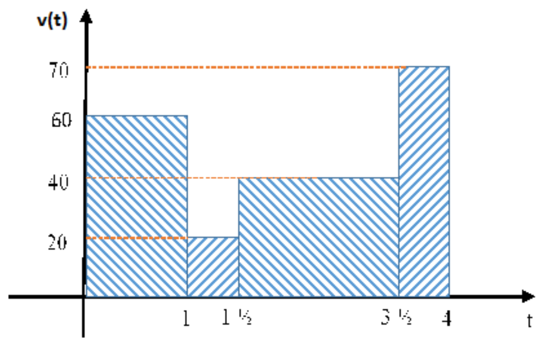
$$\int g'(x)\, f\big(g(x)\big)\, dx = \int f(u)du$$

Integral berikut $\int (x+1)\sqrt{x^2 + 2x - 1}\, dx$ dapat diselesaikan dengan memisalkan $u = x^2 + 2x - 1$, sehingga $du = (2x + 2)dx = 2\,(x + 1)dx$ atau $\frac{1}{2}\, du = (x + 1)dx$. Integral dapat diselesaikan sebagai berikut,

$$\int (x+1)\sqrt[2]{x^2 + 2x - 1}\ dx = \int \frac{1}{2}\sqrt[2]{u}\ du = \int \frac{1}{2}u^{1/2}\ du = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1)^{3/2} + C$$

2 Definisi Integral Tentu

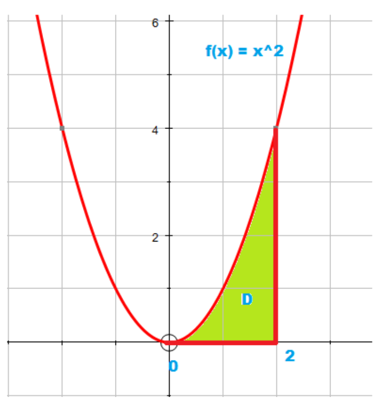
Bila kita mengendarai kendaraan bermotor (sepeda motor atau mobil) selama 4 jam dengan kecepatan 50 km / jam, berapa jarak yang ditempuh? Tentu saja jawabnya sangat mudah yaitu 50 x 4 = 200 km. Tetapi, apakah hal ini dapat terjadi dalam kehidupan sehari-hari, bahwa seseorang dapat mengendari kendaraan selama 4 jam berturut-turut dengan kecepatan konstan? Mustahil terjadi, meskipun di jalan tol sekalipun. Bisa jadi, satu jam pertama ditempuh dengan kecepatan 60 km / jam, setengah jam berikutnya dengan kecepatan 20 km/jam, dua jam selanjutnya dengan kecepatan 40 km / jam dan setengah jam sisanya ditempuh dengan kecepatan 70 km/jam. Lantas, bila terjadi seperti kondisi tersebut maka berapa jarak tempuh selama 4 jam? Untuk menjawab permasalahan tersebut dapat ditunjukkan dengan Gambar 1 berikut.



Gambar 1 Jarak Tempuh

Daerah yang diarsir pada Gambar 1 merupakan jarak tempuh, sehingga jarak tempuh selama 4 jam dihitung sebagai berikut, (60 x 1) + (20 x ½) + (40 x 2) + (70 x ½) = 220 km. Jadi, jarak tempuh sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 1 merupakan luas dari daerah yang diarsir. Pendekatan menghitung luas daerah (jarak tempuh) akan dipergunakan untuk membantu mendefinisikan pengertian integral tentu.

Diberikan permasalahan tentang menghitung luas daerah yang bentuknya tidak beraturan. Misalkan diberikan daerah tertutup D yang dibatasi diatas oleh kurva $y = x^2$, dibawah oleh sumbu X, disamping kiri oleh sumbu Y, dan disamping kanan oleh garis x = 2. Daerah D diperlihatkan oleh Gambar 2 berikut.

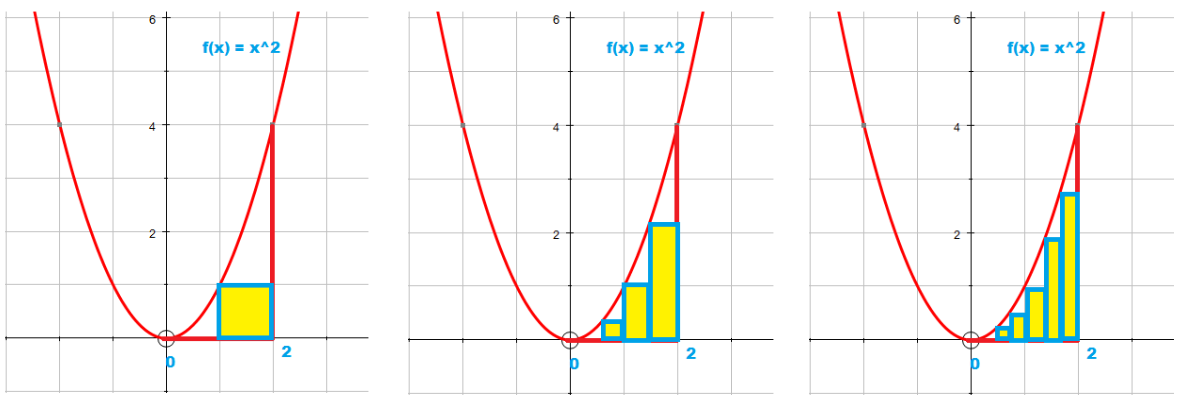


Gambar 2 Daerah D

Untuk menghitung luas daerah D, maka dilakukan pendekatan luas segiempat. Perhatikan bila interval [0,2], dibagi menjadi dua sub interval, maka dapat dibuat segiempat yang terletak di dalam daerah D, seperti terlihat pada Gambar 3 (i). Bila interval [0,2] dibagi menjadi empat sub interval, maka akan ada tiga segiempat yang terletak di dalam daerah D, Gambar 3 (ii) dan bila [0,2] dibagi menjadi enam sub interval, maka ada lima segiempat yang terletak di dalam daerah D, Gambar 3 (iii).

Perhatikan Gambar 3, hanya tersedia gambar (i) sampai dengan gambar (iii). **Lengkapilah tabel berikut. Bagaimana cara anda menentukan untuk banyak partisi dan jumlah luas partisi untuk gambar (iv) dan gambar (v)? Jelaskan jawaban anda.**

Gambar 2-3	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
Banyak partisi segiempat					
Jumlah Luas partisi segiempat					



(i) (ii) (iii)

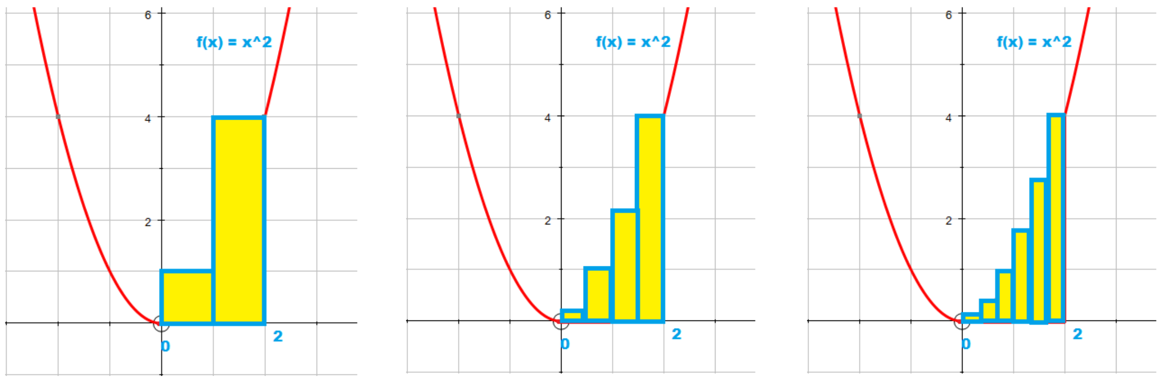
Gambar 3 Partisi (Segiempat) dalam Daerah D

Misalkan luas daerah D disingkat dengan LD dan jumlah luas segiempat yang terletak di dalam daerah D disingkat dengan PD.

- **Apakah yang bisa anda ketahui tentang LD dan PD?**
- **Adakah hubungan yang bisa anda simpulkan tentang nilai LD dan PD?**
- **Bila interval [0,2] dibuat banyak sekali (banyaknya bisa mendekati tak hingga) sub interval, apakah kesimpulan anda masih berlaku?**

Perhatikan Gambar 4, hanya tersedia gambar (i) sampai dengan gambar (iii). **Lengkapilah tabel berikut. Bagaimana cara anda menentukan banyak partisi dan jumlah luas partisi untuk gambar (iv) dan gambar (v)? Jelaskan jawaban anda.**

Gambar 1-4	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
Banyak partisi segiempat					
Jumlah luas partisi segiempat					



(i) (ii) (iii)

Gambar 4 Partisi (Segiempat) diluar Daerah D

Sekarang perhatikan bila interval [0,2] dibuat menjadi dua sub interval maka terdapat dua segiempat yang terletak di luar daerah D, Gambar 4 (i). Bila interval [0,2] dibuat menjadi empat dan enam sub interval maka berturut-turut didapatkan empat dan enam segiempat, Gambar 4 (ii) dan (iii). Misalkan jumlah luas segiempat yang terjadi dinyatakan dengan PL.

- **Apa yang bisa anda simpulkan tentang nilai dari LD dan PL?**
- **Adakah hubungan antara LD dan PL?**
- **Misalkan interval [0,2] dibuat menjadi sebanyak n buah sub interval (n banyak sekali dan bahkan mendekati tak hingga), apakah kesimpulan anda masih berlaku?**

Perhatikan Gambar 2. Misalkan interval [0,2] dibagi menjadi sebanyak n sub interval yaitu $0 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = 2$. Maka diperoleh nilai dari PD (jumlah luas partisi segiempat yang terletak di dalam daerah D) dan PL (jumlah luas partisi segiempat yang terletak di luar daerah D) sebagai berikut

- $PD = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$
- $PL = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$

Notasi sigma diatas seringkali dinamakan dengan jumlah Riemann. Secara visualisasi dan perhitungan, nampak bahwa

PD ≤ LD ≤ PL atau $\sum_{k=0}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k \le LD \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$

Bila n → ∞ (n menuju atau mendekati tak hingga) maka akan diperoleh bahwa $\Delta x_k \to 0$ maka akan diperoleh limit jumlah Riemann dari luasan tersebut yaitu

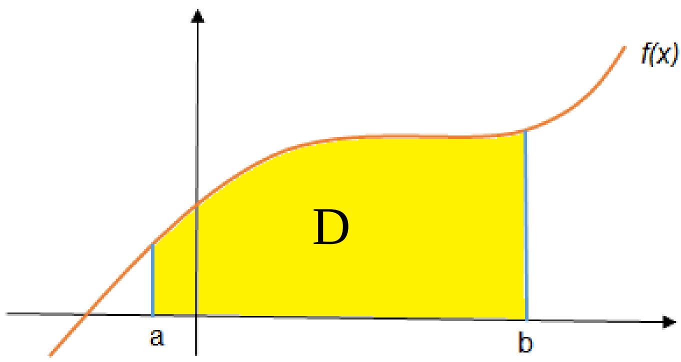
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k \le LD \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \text{ atau}$$

$$\lim_{\Delta x_k\to 0} \sum_{k=0}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k \le LD \le \lim_{\Delta x_k\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

Sebab ruas kiri dan ruas kanan bernilai sama maka dapat dituliskan

$$LD = \lim_{\Delta x_k\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

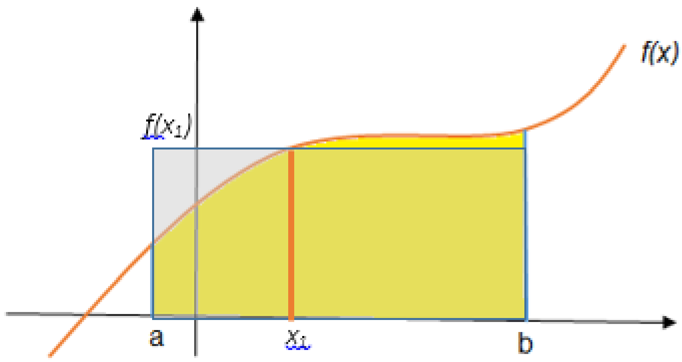
Misal diberikan daerah D yang dibatasi oleh fungsi $y = f(x), f(x) > 0$, sumbu X, garis $x = a$, dan garis $x = b$ yang didefinisikan pada suatu interval tutup [a,b], diperlihatkan oleh daerah yang diarsir pada Gambar 5 berikut.



Gambar 5. Daerah D

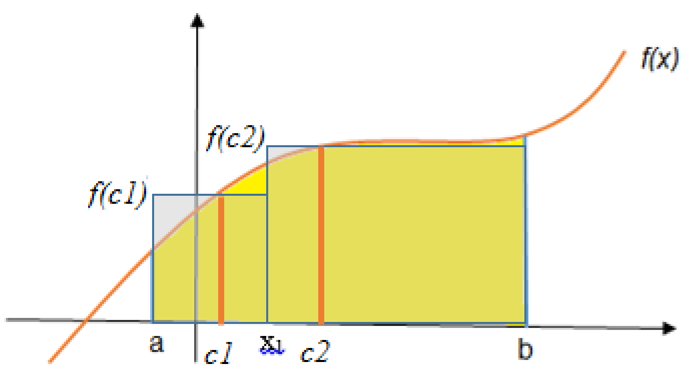
Perhitungan luas daerah D dapat juga dilakukan dengan menghitung jumlah luas partisi segiempat, namun partisi segiempat tersebut bukan partisi yang terletak di dalam ataupun diluar daerah D.

- Perhatikan Gambar 6. Misal dipilih sembarang nilai $x = x_1$ di antara a dan b. Selanjutnya dibuat segiempat dengan tinggi $f(x_1)$ dan lebar (b – a), maka luas segiempat adalah $L1 = (b - a)\, f(x_1)$.



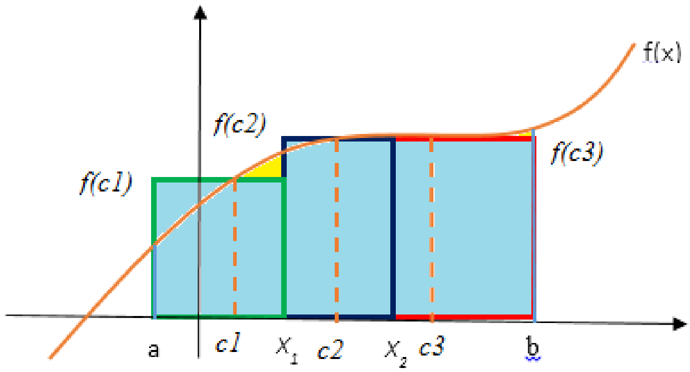
Gambar 6

- Perhatikan Gambar 7. Misal dipilih dua nilai $x = c_1$ dan $x = c_2$ di antara a dan b. Selanjutnya dibuat segiempat dengan tinggi $f(c_1)$, lebar $(x_1 - a)$ dan tinggi $f(x_2)$, lebar $(b - x_1)$ maka jumlah luas dua segiempat adalah $L2 = (x_1 - a)f(c_1) + (b - x_1)f(x_2)$.



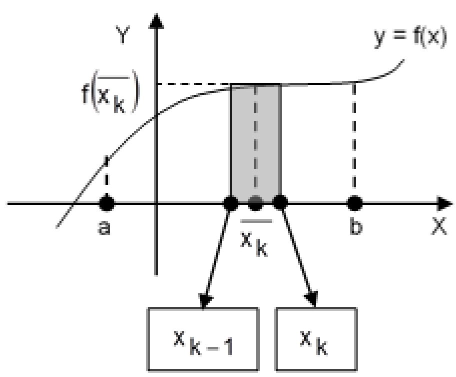
Gambar 7

- Perhatikan Gambar 8. Misal dipilih tiga nilai $x = c_1, x = c_2,$ dan $x = c_3$ yang terletak di antara a dan b. Selanjutnya dibuat segiempat (1) tinggi $f(c_1)$, lebar $(x_1 - a)$; (2) tinggi $f(x_2)$, lebar $(x_2 - x_1)$; dan (3) tinggi $f(x_3)$, lebar $(b - x_2)$, maka jumlah luas tiga segiempat adalah $L3 = (x_1 - a)f(c_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + (b - x_2)f(x_3)$



Gambar 8

Bagaimana cara yang harus dilakukan untuk menentukan jumlah luas n buah segiempat? Perhatikan Gambar 9. Pandang segiempat ke – k (partisi ke – k) dengan lebar partisi $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dan panjang partisi $f(\bar{x}_k)$, sehingga luas segiempat (partisi) ke-k adalah $f(\bar{x}_k)\Delta x_k$ dengan $\overline{x_k}$ terletak pada interval (x_{k-1}, x_k). Sebab fungsi $f(x) > 0$ maka nilai dari $f(\bar{x}_k) > 0$ dan $f(\bar{x}_k)\Delta x_k > 0$ sebab $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ selalu positif. Bila fungsi $f(x)$ terletak dibawah sumbu X maka nilai $f(\bar{x}_k)$ dan $f(\bar{x}_k)\Delta x_k$ juga akan negatif. Oleh karena itu, jumlah Riemann dari partisi bisa bernilai positif atau bernilai negatif.



Gambar 9

Misalkan interval $[a,b]$ dibagi menjadi n sub interval (dalam hal ini diambil yang panjangnya sama walaupun hal ini tidaklah mutlak), misal $a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b$ dan $\Delta x_k = \Delta x = x_k - x_{k-1}$. Pada setiap sub interval $[x_{k-1}, x_k]$ kita ambil suatu titik $\overline{x_k}$ (titik sembarang namun untuk memudahkan penjelasan dipilih titik tengah sub interval) yaitu

$\overline{x_k} = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$. Partisi yang terbentuk merupakan segiempat dengan ukuran Δx dan $f\left(\overline{x_k}\right)$ sebagai lebar dan panjang partisi, sehingga luas tiap partisi adalah $f\left(\overline{x_k}\right)\Delta x$. Oleh karena itu didapatkan jumlah luas partisi pada interval $[a,b]$ yaitu : $\sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x_k}\right)\Delta x$. Jumlah ini dinamakan jumlah Riemann untuk $f(x)$ yang bersesuaian dengan partisi. Maka luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, garis $x = a$, garis $x = b$, dan sumbu X akan didekati oleh jumlah Riemann di atas bila diambil $n \to \infty$ (n mendekati tak hingga). Dari sini dapat didefinisikan suatu integral tentu yaitu integral dari fungsi $y = f(x)$ pada suatu interval $[a,b]$.

Definisi Integral Riemann

Misal fungsi $f(x)$ kontinu pada interval [a,b], $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \Delta x$ lebar partisi yang terletak pada interval [a,b], $a = x_0, b = x_n$, $\overline{x_k} = \frac{x_k - x_{k-1}}{2}$, maka integral dari $f(x)$ atas interval [a,b] didefinisikan sebagai limit jumlah Riemann,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x_k}\right)\Delta x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x_k}\right)\Delta x$$

Bila limit ada maka fungsi $f(x)$ dikatakan **integrabel** (dapat diintegralkan) pada interval [a,b]. Integral ini disebut **Integral Riemann** atau **Integral Tentu**.

3 Teorema Dasar Kalkulus

Misal fungsi $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$ dan fungsi $F(x)$ adalah anti turunan dari fungsi $f(x)$, maka berlaku $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Dari bentuk integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ maka fungsi $f(x)$ dinamakan **integran**, bilangan a dinamakan **batas bawah** integral dan bilangan b dinamakan **batas atas** integral. Penerapan dari teorema dasar kalkulus pertama diperlihatkan berikut. Selesaikan integral tentu $\int_0^2 (2x+1)dx$. Anti turunan dari integran $f(x) = 2x+1$ adalah $F(x) = x^2 + x$. Dengan menerapkan teorema dasar kalkulus pertama maka diperoleh $\int_0^2 (2x+1)dx = \left[x^2 + x\right]_0^2 = 6$. Nilai integral ini positif sebab integran $f(x) = 2x+1$ positif pada interval [0,2].

Bila fungsi $f(x) < 0$ pada interval $[a,b]$ maka nilai integral $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. **Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = -3x + 3$ bernilai negatif pada interval [1,3]? Berapa nilai dari integral $\int_1^3 (-3x+3)\,dx$? Selanjutnya, mungkinkah nilai dari integral sebuah fungsi kontinu akan bernilai 0 (nol)? Jelaskan jawaban Anda.**

Bila dua buah fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ integrabel (dapat diintegralkan) pada interval $[a,b]$, dan berlaku $f(x) \le g(x)$ untuk setiap nilai x pada interval $[a,b]$, $x \in [a,b]$, maka berlaku sifat perbandingan yaitu $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. Misal diberikan fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 3$ dan $g(x) = 1 - 2x$ maka berlaku $f(x) \le g(x)$ untuk setiap nilai x pada interval [-2, 2]. **Bagaimana cara anda menunjukkan bahwa berlaku $f(x) \le g(x)$ untuk setiap nilai x pada interval [-2, 2]? Selanjutnya hitunglah nilai integral $\int_{-2}^2 f(x)dx$, $\int_{-2}^2 g(x)dx$, $\int_{-2}^2 [g(x) - f(x)]dx$, dan $\int_{-2}^2 [f(x) - g(x)]dx$.**

Misal diberikan integral $\int_a^b f(x)dx$ dan nilai c terletak pada interval $[a,b]$, maka dapat dituliskan $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Bentuk integral ini dapat digunakan untuk menyelesaikan integral $\int_{-2}^3 f(x)dx$ dengan fungsi $f(x) = \begin{cases} -2 & , x < 0 \\ 1 + x & , 0 < x < 2 \\ 3x^2 & , x > 2 \end{cases}$. Perhatikan bahwa fungsi $f(x)$ terdefinisi untuk tiga buah interval yaitu $x < 0, 0 < x < 2,$ dan $x > 2$ sehingga penyelesaian integral diberikan berikut,

$$\int_{-2}^3 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

$$\int_{-2}^3 f(x)dx = \int_{-2}^0 -2\,dx + \int_0^2 (1+x)\,dx + \int_2^3 3x^2\,dx$$

$$\int_{-2}^3 f(x)dx = -2x\,\Big|_{-2}^{0} + \left(x + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2 + x^3\,\Big|_2^3$$

$$\int_{-2}^3 f(x)dx = [0 - (-4)] + [(2+2) - 0] + [27 - 8] = 27$$

Lantas, bagaimana cara menyelesaikan $\int_0^5 f(x)\,dx$? Uraian secara detail jawaban Anda. Kemudian selesaikan integral $\int_2^2 (2x-1)\,dx$, $\int_0^2 (2x-1)\,dx$, $\int_2^0 (2x-1)\,dx$. Kesimpulan apa yang bisa Anda peroleh?

4 Integral Fungsi Genap, Fungsi Ganjil, dan Fungsi Komposisi

- Bila fungsi $f(x)$ merupakan fungsi ganjil, yaitu $f(-x) = -f(x)$ maka integral $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Bila fungsi $f(x)$ merupakan fungsi genap, yaitu $f(-x) = f(x)$ maka integral $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{-a}^{a} f(x)dx$.

Misal diberikan fungsi $f(x) = -x^3$. **Apakah fungsi tersebut merupakan fungsi ganjil, genap atau tidak kedua-duanya? Selain menggunakan definisi, apakah ada cara untuk menyelidiki bahwa fungsi tersebut ganjil, genap atau tidak kedua-duanya? Jelaskan. Selanjutnya berapa nilai dari $\int_{-1}^{0} -x^3\, dx$, $\int_{0}^{1} -x^3\, dx$, dan $\int_{-1}^{1} -x^3\, dx$?**

Pada integral tentu, juga berlaku integral fungsi komposisi, yaitu $\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$. Contoh dari bentuk integral fungsi komposisi ini diperlihatkan berikut, $\int_{-3}^{3} 8x\sqrt{7+2x^2}\, dx$. Penyelesaian dilakukan dengan mendapatkan solusi integral tak tentu $\int 8x\sqrt{7+2x^2}\, dx$ dan memisalkan $u = 7 + 2x^2$, sehingga $du = 4x\, dx$ atau $2\, du = 8x\, dx$. Jadi diperoleh,

$$\int 8x\sqrt{7+2x^2}\, dx = \int 2u^{1/2}\, du = \frac{4}{3}u^{3/2} = \frac{4}{3}(7+2x^2)^{3/2}$$

Integral tentu diselesaikan berikut,

$$\int_{-3}^{3} 8x\sqrt{7+2x^2}\, dx = \left[\frac{4}{3}(7+2x^2)^{3/2}\right]_{-3}^{3} = 0$$

Apakah pengerjaan di atas, juga dapat dilakukan seperti uraian berikut? Berikan komentar Anda.

(1) Dimisalkan $u = 7 + 2x^2$, sehingga $du = 4x\, dx$ atau $2\, du = 8x\, dx$

(2) $\int_{-3}^{3} 8x\sqrt{7+2x^2}\, dx = \int_{-3}^{3} 2u^{1/2}\, du$

(3) $\int_{-3}^{3} 2u^{1/2}\, du = \left[\frac{4}{3}(7+2x^2)^{3/2}\right]_{-3}^{3}$

(4) $\left[\frac{4}{3}(7+2x^2)^{3/2}\right]_{-3}^{3} = \frac{4}{3}\left[(7+2(9))^{3/2} - (7+2(9))^{3/2}\right] = 0$

5 Fungsi dalam Notasi Integral

Misal fungsi $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$, maka terdapat nilai c di dalam interval (a,b), $c \in (a,b)$ sehingga berlaku $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. Bentuk integral ini dikatakan sebagai N**ilai Rata-rata Integral**, dengan $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ merupakan nilai rata-rata integral dari fungsi $f(x)$. Pengertian nilai rata-rata integral ini akan digunakan untuk mendapatkan turunan dari fungsi dalam notasi integral.

Misal fungsi $f(x)$ kontinu pada interval $[a,b]$ dan diberikan fungsi $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Menggunakan pengertian dari turunan maka akan diperoleh,

$$\frac{dg}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \text{ (definisi turunan)}$$

$$\frac{dg}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} \text{ (definisi fungsi } g(x) = \int_a^x f(t)\,dt\text{)}$$

$$\frac{dg}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt}{h} \text{ (sifat integral } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\text{)}$$

$$\frac{dg}{dx} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \right) \text{ (sifat integral } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\text{)}$$

Perhatikan ruas kanan (yang terletak di dalam kurung). Nilai tersebut merupakan nilai rata-rata dari integral fungsi $f(t)$ pada interval $[x, x+h]$, sehingga dapat dituliskan

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(c) \text{ dengan } c \text{ terletak pada interval } [x, x+h]$$

Oleh karena itu dapat didapatkan, $\frac{dg}{dx} = \lim_{h\to 0} f(c)$

Apa yang terjadi pada *c*, bila h mendekati nol? Mengapa? Jelaskan jawaban anda. Akhirnya kita peroleh $\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$, sehingga $\frac{dg}{dx} = f(x)$. Dari bentuk terakhir ini, apabila dihadapkan suatu fungsi dalam notasi integral $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, maka turunan dari fungsi $g(x)$ adalah $f(x)$.

Misal diberikan fungsi $g(x) = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}\, dt$, maka untuk mendapatkan turunan dari fungsi $g(x)$ tanpa harus menyelesaikan integral terlebih dahulu, namun cukup dengan mensubstitusikan *x* dengan *t* pada integran, sehingga turunan dari $F(x)$ adalah

$$\frac{dg}{dx} = f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

Lantas bagaimana mendapatkan turunan dari sebuah fungsi dalam notasi integral namun batas atas integral tidak hanya *x*, misalkan $g(x) = \int_1^{2x+1} \sqrt{t}\ \sin t \ \ dt$. Atau bahkan batas atas dan batas bawah juga merupakan fungsi dalam *x*, seperti $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t^2+1} dt$. Untuk menyelesaikan turunan dari fungsi tersebut akan diuraiakn penjelasan berikut.

Bila fungsi $g(x)$ yang dinyatakan dalam notasi integral, $g(x) = \int_{w(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$, maka untuk mendapatkan turunan dari fungsi $g(x)$ dilakukan sebagai berikut. Misalkan $F(x)$ merupakan anti turunan dari fungsi $f(x)$, $F'(x) = f(x)$ maka berdasarkan teorema dasar kalkulus, integral dapat dituliskan menjadi

$$g(x) = \int_{w(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(w(x))$$

Turunan dari fungsi $g(x)$ dicari dengan mencari turunan pertama dari fungsi komposisi $F(v(x))$ dan $F(w(x))$ yaitu

$$\frac{dF(v(x))}{dx} = F'(v(x))v'(x) \text{ dan } \frac{dF(w(x))}{dx} = F'(w(x))w'(x)$$

Sehingga turunan dari fungsi $g(x)$ adalah $g'(x) = F'(v(x))v'(x) - F'(w(x))w'(x)$. Sebab fungsi $F(x)$ merupakan anti turunan dari fungsi $f(x)$ maka turunan pertama dari fungsi $g(x)$ dinyatakan sebagai berikut,

$$g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(w(x))w'(x)$$

atau

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{w(x)}^{v(x)} f(t)\,dt\right] = f(v(x))\,v'(x) - f(w(x))\,w'(x)$$

Hal ini berarti bahwa untuk mendapatkan turunan dari fungsi yang dinyatakan dengan notasi integral dapat dilakukan tanpa harus menghitung integralnya terlebih dahulu, namun cukup dengan melihat bentuk integrannya. Misal diberikan fungsi $g(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2+1}\,dt$. Integran dari bentuk integral ini adalah $f(t) = \sqrt{t^2+1}$, batas atas integral $v(x) = x^2$, dan batas bawah integral $w(x) = 2x$. Bila digunakan rumusan $g'(x) = f(v(x))v'(x) - f(w(x))w'(x)$ maka diperoleh hasil turunan dari fungsi $g(x)$,

$$g'(x) = f(x^2)\,(2x) + f(2x)\,(2)$$

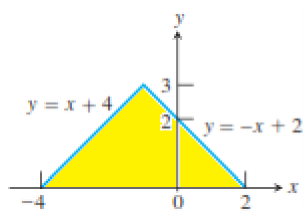
$$g'(x) = \sqrt{(x^2)^2 + 1}\,(2x) + \sqrt{(2x)^2 + 1}\,(2)$$

$$g'(x) = 2x\sqrt{x^4 + 1} + 2\sqrt{4x^2 + 1}$$

6 Luas Daerah

Perhatikan daerah D merupakan daerah yang diarsir pada Gambar 10. Daerah D merupakan bentuk bangun segitiga, luas segitiga merupakan ½ dikalikan alas (6) dan tinggi (3). Adakah cara lain untuk mendapatkan luas segitiga dengan bantuan integral? Mengapa harus dilakukan dengan menggunakan metode integral? Integral dapat digunakan untuk mendapatkan luasan daerah yang tidak beraturan dengan cara yang lebih mudah. Ingat penjelasan awal sub bab integral tentu. Bila diterapkan integral tentu untuk menghitung luas daerah D maka diperoleh bentuk integral berikut dan **tunjukkan bahwa L = 9**.

$$L = \int_{-4}^{-1} (x + 4)\,dx + \int_{-1}^{2} (-x + 2)\,dx$$



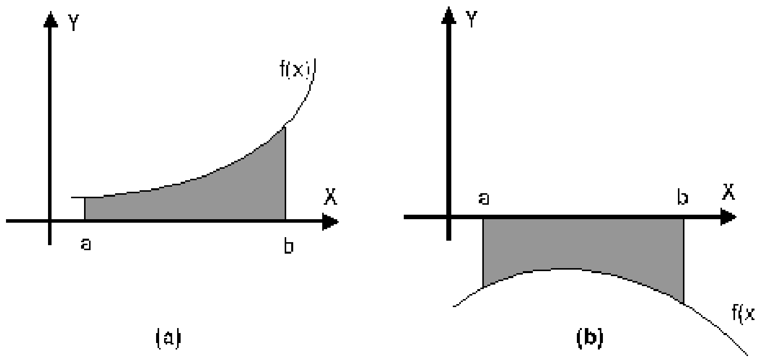
Gambar 10 Daerah D

Secara umum, penjelasan penerapan integral tentu untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva dan atau garis diberikan berikut. Misal suatu daerah D dibatasi oleh kurva $y = f(x) \geq 0$, garis $x = a$, garis $x = b$, dan sumbu X (perhatikan Gambar 11 (a)), maka luas daerah dihitung dengan integral tentu sebagai berikut :

$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$

Bila fungsi $f(x)$ terletak di bawah sumbu X, $f(x) \leq 0$ maka integral dari fungsi $f(x)$ pada interval $[a,b]$ akan bernilai negatif atau nol. Oleh karena itu luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x) \leq 0$, garis $x = a$, garis $x = b$, dan sumbu X (Perhatikan Gambar 11 (b)) dituliskan sebagai berikut :

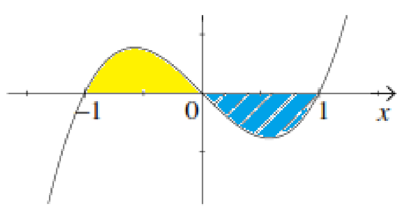
$$L = -\int_a^b f(x)\,dx$$



Gambar 11. Daerah D

Misal diberikan daerah D yang dibatasi oleh kurva $f(x) = x(x^2 - 1)$, garis $x = -1$, garis $x = 1$, dan sumbu X, sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 12. Perhatikan bahwa daerah D terdiri dari dua daerah, terletak di atas sumbu X untuk interval [-1,0] dan terletak di bawah sumbu X untuk interval [0,1]. Nilai integral fungsi $f(x) = x(x^2 - 1)$ atas interval [-1,0] dan interval [0,1] berturut-turut adalah positif dan negatif, sehingga luas daerah D dapat dinyatakan dengan,

$$L = \int_{-1}^{0} x(x^2 - 1)dx - \int_{0}^{1} x(x^2 - 1)\,dx$$



Gambar 12 daerah D

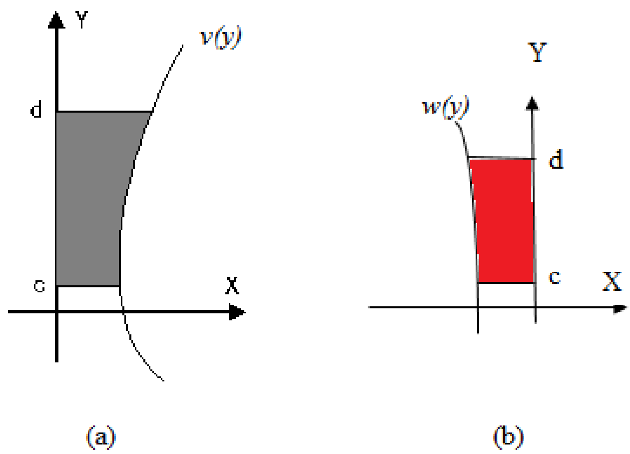
Bagaimana penyelesaian detail dari integral di atas? Masih dengan menerapkan integral tentu, apakah ada cara lain untuk mendapatkan luas daerah D pada Gambar 3-3? Jelaskan.

Bentuk integral tentu yang dipakai untuk menghitung luas daerah D diatas, integrasi dilakukan ke-*x*. Kadang dijumpai daerah D akan lebih mudah dihitung luasnya dengan integrasi ke-*y*. Bentuk daerah D yang dimaksud dijelaskan berikut. Misalkan diberikan daerah D yang dibatasi $x = v(y) \geq 0$, garis $y = c$, garis $y = d$, dan sumbu Y (Perhatikan Gambar 13 (a)) maka luas daerah dituliskan dengan norasi integral berikut (dengan integrasi ke-*y*) :

$$L = \int_c^d v(y)\,dy$$

Sedangkan untuk daerah D ditunjukkan oleh Gambar 13 (b), dibatasi oleh grafik $x = w(y) \leq 0$, garis $y = c$, garis $y = d$, dan sumbu Y, maka luas daerah D diberikan dengan :

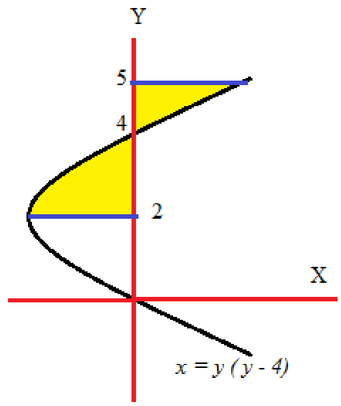
$$L = -\int_c^d w(y)\,dy$$



Gambar 13 Daerah D

Perhatikan daerah D yang ditunjukkan oleh Gambar 14, dibatasi oleh kurva $x = y(y - 4)$, garis $y = 2$, garis $y = 5$, dan sumbu Y. Daerah D terdiri dari dua daerah, terletak di sebelah kiri sumbu Y, untuk interval [2,4] dan terletak di sebelah kanan sumbu Y, untuk interval [4,5]. Nilai integral fungsi $x = y(y - 4)$ pada interval [2,4] bernilai negatif dan pada interval [4,5] bernilai positif, sehingga luas daerah D dituliskan sebagai berikut,

$$L = -\int_2^4 y(y-4)dy + \int_4^5 y(y-4)dy$$



Gambar 14 Daerah D

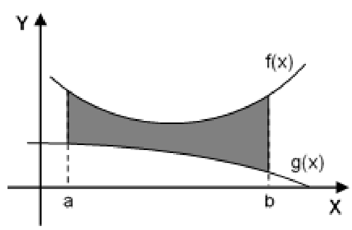
7 Luas Daerah antara Dua Kurva

Kadang dijumpai daerah D dibatasi oleh dua buah kurva, misal $y = f(x)$ dan $y = g(x)$. Untuk mendapatkan luas daerah tertutup D yang dibatasi oleh dua kurva tersebut maka dilakukan langkah berikut.

- Tentukan titik potong kedua kurva tersebut, misal $x = a$ dan $x = b$, dengan $a \leq b$
- Tentukan kurva yang terletak di atas dan di bawah pada interval $a \leq x \leq b$,
- Integrasikan (kurva di atas – kurva di bawah) terhadap interval $[a,b]$

Dengan kata lain, misal daerah D dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$, garis $x = a$, dan garis $x = b$ dengan $f(x) \geq g(x)$ untuk $x \in [a, b]$ seperti ditunjukkan oleh Gambar 15, maka luas daerah D dituliskan serbagai berikut,

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

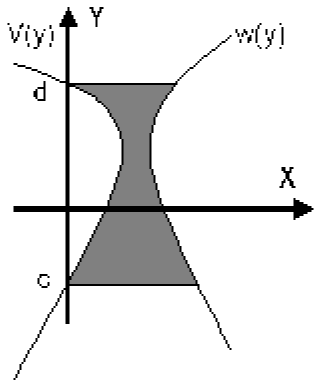


Gambar 15 Daerah D

Seperti halnya uraian terdahulu, kadang dijumpai daerah tertutup D akan lebih mudah dihitung luasnya bila integrasi dilakukan ke-y. Misal daerah D dibatasi oleh kurva $x = w(y), x =$

$v(y)$, garis $y = c$, dan garis $y = d$ dengan $w(y) \geq v(y)$untuk $y \in [c, d]$ seperti ditunjukkan oleh Gambar 16, maka luas daerah D ditulsikan sebagai berikut,

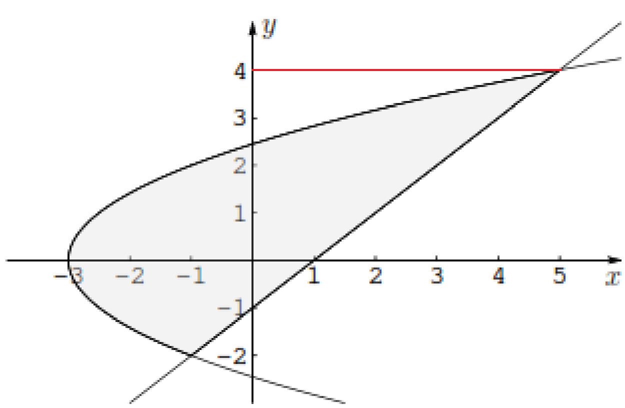
$$L = \int_c^d [w(y) - v(y)] dy$$



Gambar 16 Daerah D

Misal diberikan daerah tertutup D yang dibatasi oleh dua kurva $y = x - 1$ dan $y^2 = 2x + 6$, seperti ditunjukkan oleh Gambar 17. **Jelaskan bagaimana langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan gambar tersebut?** Daerah tertutup D dibatasi oleh kurva $x = y + 1, x = \frac{1}{2}y^2 - 3$, garis $y = 4$, dan garis $y = -2$, dengan $\frac{1}{2}y^2 - 3 \leq y + 1$ untuk $y \in [-2,4]$. Menggunakan notasi himpunan, daerah D dapat dituliskan menjadi, $D = \left\{(x, y) | \frac{1}{2}y^2 - 3 \leq x \leq y + 1, -2 \leq y \leq 4\right\}$. Luas daerah D dapat dinyatakan dengan integral sebagai berikut,

$$L = \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy$$



Gambar 17 Daerah D

Berapakah luas daerah D dengan notasi integral di atas? Uraikan secara lengkap. Apakah ada cara lain untuk mendapatkan luas daerah D? Jelaskan.

8 Volume Benda Putar dengan Motode Cakram

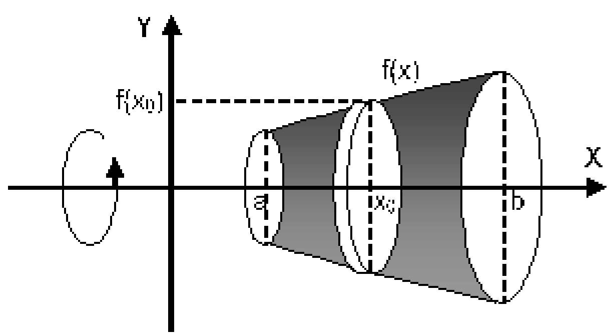
Integral tentu dapat juga diterapkan untuk menghitung volume benda putar. Benda putar yang sederhana dapat kita ambil contoh adalah tabung. Volume tabung adalah hasilkali luas alas (luas lingkaran) dan tinggi tabung. Volume dari benda putar secara umum dapat dihitung dari hasilkali antara luas alas dan tinggi. Bila luas alas dinyatakan sebagai fungsi dalam x, $A(x)$ dan tinggi benda putar adalah sub interval Δx pada interval $[a,b]$ maka volume benda putar dapat dihitung menggunakan integral tentu sebagai berikut:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

Untuk mendapatkan volume benda putar yang terjadi karena suatu daerah diputar terhadap suatu sumbu, dilakukan dengan menggunakan dua buah metode yaitu metode cakram dan kulit tabung.

Metode Cakram

Misal daerah D dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $y = 0$, garis $x = a$, dan garis $x = b$ diputar dengan sumbu putar sumbu X. Volume benda putar (berupa pejal / padat) yang terjadi ditunjukkan oleh Gambar 19, dapat dihitung dengan memandang bahwa volume benda putar tersebut merupakan jumlah tak berhingga cakram yang berpusat di titik-titik pada interval $[a,b]$.



Gambar 18

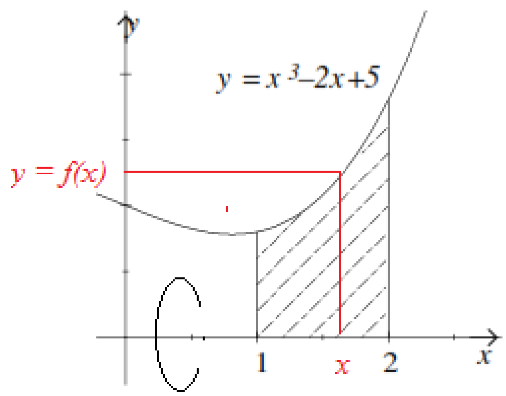
Benda putar di atas dapat dipandang sebagai jumlah dari n buah cakram. Misal diambil cakram ke-k (sangat tipis) dengan pusat cakram $(x_k, 0)$ dan jari-jari $r = f(x_k)$, maka luas cakram ke-k dinyatakan sebagai $A(x_k) = \pi f^2(x_k)$. Jumlah n luas cakram dituliskan : $\sum_{k=1}^{n} A(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(x_k)$. Untuk $n \to \infty$ dan ketebalan dari cakram ke-k dinyatakan dengan Δx_k

maka hasilkali antara jumlah luas cakram dengan ketebalan cakram akan mendekati volume benda putar, yaitu $V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi f^2(x_k)\Delta x_k$. Menggunakan limit jumlah Riemann maka volume benda putar dinyatakan sebagai berikut :

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Misal diberikan daerah tertutup D yang dibatasi oleh kurva $y = x^3 - 2x + 5$, garis $x = 1$, garis $x = 2$, dan sumbu X. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu X, maka volume benda putar dapat dihitung dengan menggunakan metode cakram. Cara yang dilakukan adalah memilih sembarang nilai x pada interval [1,2], maka jari-jari cakram adalah $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Perhatikan Gambar 19. Volume benda putar dihitung dengan integral berikut (**penyelesaian integral ditinggalkan sebagai latihan**),

$$V = \int_1^2 \pi[f(x)]^2 dx = \pi\int_1^2 \left[x^3 - 2x + 5\right]^2 dx$$



Gambar 19

Bila sumbu Y sebagai sumbu putar dan perhitungan volume benda putar digunakan metode cakram maka integrasi dilakukan ke-*y*. Oleh karena itu, daerah yang akan diputar dibatasi oleh kurva $x = w(y)$, garis $y = c$, garis $y = d$, dan sumbu X. Untuk mendapatkan volume benda putar dilakukan dengan cara memilih sembarang nilai *y* pada interval [*c*,*d*] dan tinggi cakram adalah $x = w(y)$, sehingga volume benda putar dinyatakan dengan,

$$V = \int_c^d \pi[w(y)]^2 dy$$

Perhatikan daerah D yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$, garis $y = 1$, garis $y = 4$, dan sumbu Y. **Gambar dan arsir daerah D tersebut**. Bila D diputar mengelingi sumbu Y dan akan digunakan metode cakram, maka volume benda putar dihitung dengan melakukan integrasi ke-*y*.

Oleh karena itu, D dapat dinyatakan dengan notasi himpunan dengan batas-batas y adalah konstanta. **Bagaimana notasi himpunan yang menunjukkan daerah D? Selanjutnya, nyatakan volume benda putar dalam notasi integral.**

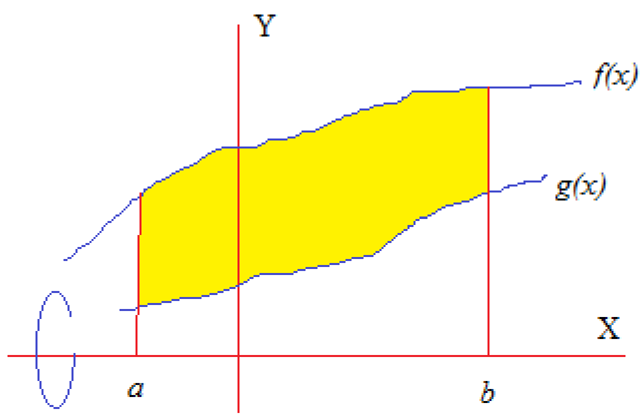
9 Volume Benda Putar dari Daerah antara Dua Kurva

Misal diberikan daerah tertutup D yang dibatasi oleh dua kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$, garis $x = a$ dan garis $x = b$. Bila berlaku $f(x) \geq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dan daerah D diputar dengan sumbu putar sumbu X (perhatikan Gambar 20), dengan metode cakram, maka volume benda putar merupakan volume dari perputaran daerah yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $x = a$, garis $x = b$, dan sumbu X dikurangi oleh volume dari perputaran daerah yang dibatasi oleh kurva $y = g(x)$, garis $x = a$, garis $x = b$, dan sumbu X. Oleh karena itu, volume benda putar dituliskan dengan,

$$V = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx - \int_a^b \pi\,[g(x)]^2\,dx$$

atau

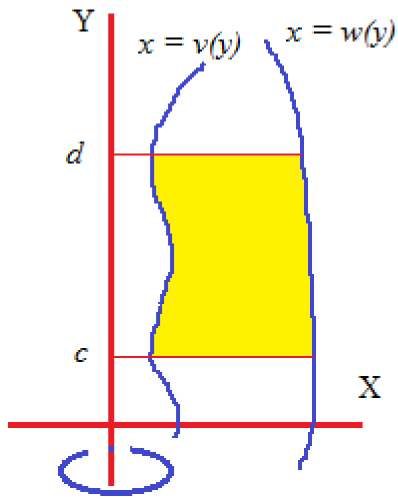
$$V = \int_a^b \pi\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)dx$$



Gambar 20 Daerah D

Bila daerah tertutup D dibatasi dua kurva $x = w(y), x = v(y)$, dengan $w(y) \geq v(y)$ untuk setiap $y \in [c, d]$, garis $y = c$, dan garis $y = d$ diputar mengelilingi sumbu Y (diperlihatkan oleh Gambar 21) maka dengan menggunakan metode cakram, volume benda putar dinyatakan dengan,

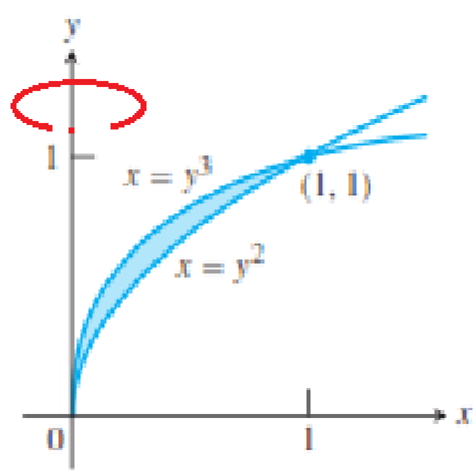
$$V = \int_c^d \pi\left([w(y)]^2 - [v(y)]^2\right)dy$$



Gambar 21 Daerah D

Diberikan daerah D seperti yang diperlihatkan oleh Gambar 22. Bila daerah D diputar dengan sumbu Y sebagai sumbu putar dan digunakan metode cakram untuk menghitung volume benda putar, maka integrasi dilakukan ke-y, sehingga D dinyatakan sebagai daerah tertutup yang dibatasi oleh kurva $x = y^2$ dan $x = y^3$ dengan $y^2 \geq y^3$ untuk setiap $y \in [0,1]$, garis $y = 0$, dan garis $y = 1$. Volume benda putar dapat dinyatakan dengan (**perhitungan integral ditinggalkan sebagai latihan**),

$$V = \int_0^1 \pi \, \{[y^2]^2 - [y^3]^2\} \, dy$$



Gambar 22 Daerah D

Dari uraian diatas, dapat disimpulkan bahwa bila akan menghitung volume benda putar dari sebuah daerah tertutup D, dengan menggunakan metode cakram dengan sumbu putar:

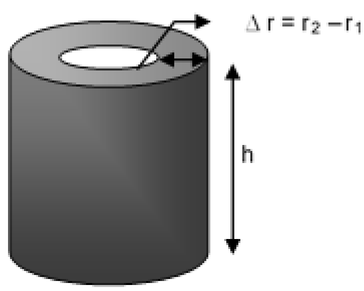
- Sumbu Y, maka integrasi dilakukan ke-y dan volume benda putar dari perputaran daerah tertutup D pada Gambar 22, dinyatakan dengan $V = \int_0^1 \pi \{[y^2]^2 - [y^3]^2\}\, dy$
- Sumbu X, maka integrasi dilakukan ke-x dan **bagaimana rumusan volume benda putar dari perputsan daerah tertutup D pada Gambar 22?**

10 Volume Benda Putar dengan Metode Kulit Tabung

Metode berikut sebagai alternatif lain dalam perhitungan volume benda putar yang mungkin lebih mudah diterapkan bila dibandingkan dengan metode cakram. Benda putar yang terjadi dapat dipandang sebagai tabung dengan jari-jari kulit luar dan kulit dalam berbeda, maka volume benda putar yang akan dihitung adalah volume dari kulit tabung. Untuk lebih memperjelas pengertian metode kulit tabung, diberikan uraian berikut. Pandang tabung (Gambar 23) dengan jari-jari kulit dalam dan kulit luar berturut-turut r_1 dan r_2, tinggi tabung h. Maka volume kulit tabung adalah

$$\Delta V = (\pi r_2 - \pi r_1)h = 2\pi r h \Delta r$$

$$\text{dengan : } \frac{r_2 + r_1}{2} = r(\text{ rata} - \text{rata } \text{ jari} - \text{jari }), r_2 - r_1 = \Delta r$$



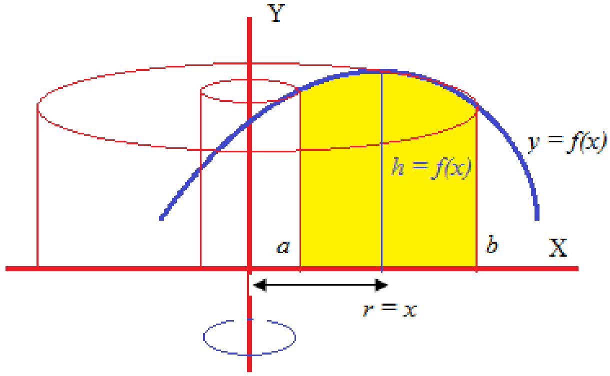
Gambar 23 Tabung

Bila daerah tertutup D (diarsir kuning) dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, garis $y = 0$, garis $x = a$, dan garis $x = b$ diputar mengelilingi sumbu Y maka kita dapat memandang sebagai bangun yang menyerupai kulit tabung dengan jari-jari $r = x$, $\Delta r = \Delta x$, dan tinggi tabung $h = f(x)$, diperlihatkan oleh Gambar 24 berikut. Dengan menggunakan pendekatan kulit tabung, maka diperoleh,

$$\Delta V = 2\pi\, r\, h\, \Delta x = 2\pi\, x\, f(x)\, \Delta x$$

Berdasarkan uraian limit jumlah Riemann, maka volume benda putar dapat dinyatakan sebagai berikut :

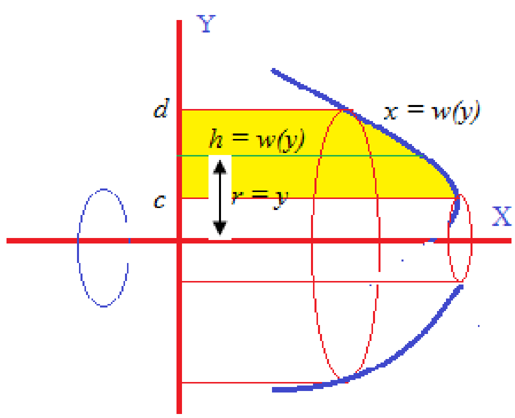
$$V = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$



Gambar 24

Bila daerah tertutup D (diarsir kuning, pada Gambar 25) dibatasi oleh kurva $x = w(y)$, garis $x = 0$, garis $y = c$, dan garis $y = d$ diputar mengelilingi sumbu X, maka jari-jari kulit tabung $r = y$ dan tinggi kulit tabung $h = w(y)$, sehingga volume benda putar dinyatakan dengan,

$$V = \int_c^d 2\pi y\, w(y)\, dy$$



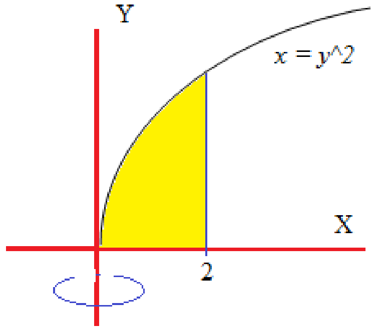
Gambar 25

Daerah tertutup D ditunjukkan oleh Gambar 26. **Kurva atau garis apa saja yang menjadi batas daerah tertutup D?** Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu Y dan digunakan metode kulit tabung, maka dipilih jari-jari kulit tabung merupakan sembarang nilai $r = x$ pada interval $[0,2]$ dan tinggi kulit tabung ditentukan sebagai berikut. Perhatikan $x = y^2$, diperoleh $y = \sqrt{x}$

atau $y = -\sqrt{x}$. Sebab kurva terletak di atas sumbu X maka tinggi kulit tabung adalah $y = \sqrt{x}$. Oleh karena itu volume benda putar dengan metode kulit tabung dituliskan sebagai berikut,

$$V = \int_0^2 2\pi\, x\, \sqrt{x}\; dx$$

Selesaikan integral di atas sehingga diperoleh nilai volume benda putar. Adakah ada cara lain untuk mendapatkan volume benda putar bila daerah D diputar mengelilingi sumbu Y? Jelaskan.

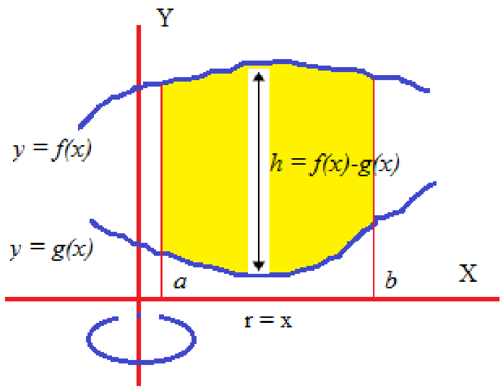


Gambar 26

11 Volume Benda Putar dari Perputaran Daerah antara Dua Kurva

Misal daerah D dibatasi oleh kurva $y = f(x), y = g(x)$ yang memenuhi $f(x) \geq g(x)$ untuk $x \in [a, b]$, garis $x = a$, dan garis $x = b$ ditunjukkan oleh Gambar 27. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu Y dan digunakan metode kulit tabung maka jari-jari kulit tabung adalah sembarang nilai $r = x$ pada interval $[a, b]$ dan tinggi kulit tabung adalah $h = f(x) - g(x)$, sehingga volume benda putar dapat dinyatakan dengan,

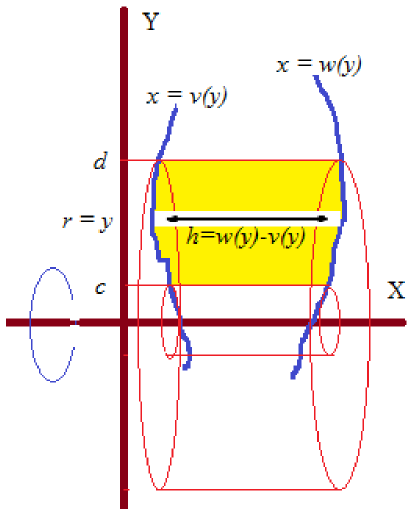
$$V = \int_a^b 2\pi x\left[f(x) - g(x)\right]dx$$



Gambar 27

Daerah tertutup D dibatasi oleh kurva $x = w(y)$ dan $x = v(y)$ yang berlaku $w(y) \gg v(y)$ untuk $y \in [c, d]$, garis $y = c$, dan garis $y = d$ diputar mengelilingi sumbu X. Bila digunakan metode kulit tabung maka jari-jari kulit tabung adalah sembrang nilai $r = y$ pada interval $[c, d]$ dan tinggi kulit tabung adalah $h = w(y) - v(y)$, diperlihatkan oleh Gambar 28. Oleh karena itu volume benda putar dinyatakan dengan,

$$V = \int_c^d 2\pi y\left[w(y) - v(y)\right]dy$$

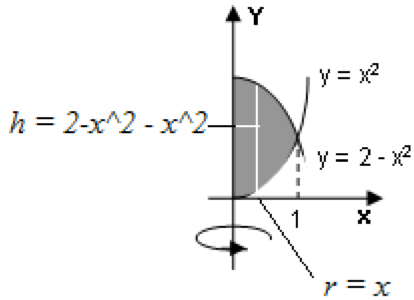


Gambar 28

Diberikan daerah tertutup D yang terletak di kuadran pertama, dibawah parabola $y = 2 - x^2$ dan di atas parabola $y = x^2$, diperlihatkan oleh Gambar 29. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu Y dan digunakan metode kulit tabung untuk menghitung volume benda putar, maka jaro-jaroi kulit tabung adalah sembarang nilai $r = x$ pada interval [0,1] dan tinggi tabung adalah $h = w(y) = v(y)$, sehingga volume benda putar dinyatakan dengan,

$$V = 2\pi\int_0^1 x\left[\left(2 - x^2\right) - x^2\right]dx = \pi$$

Selesaikan integral di atas sehingga diperoleh nilai volume benda putar. Apakah ada cara lain untuk mendapatkan volume benda putar bila daerah D diputar mengelilingi sumbu Y? Jelaskan.

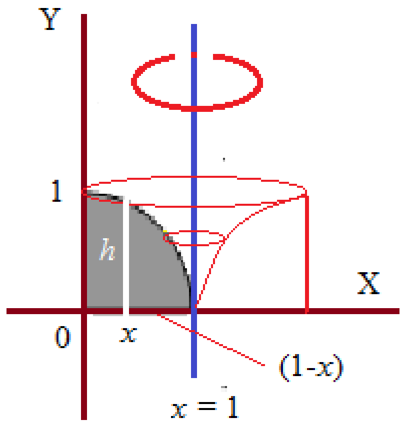


Gambar 29

12 Volume Benda Putar dengan Sumbu Putar Sejajar Salib Sumbu

Misal diberikan daerah tertutup D yang terletak di kuadran pertama yang dibatasi oleh kurva $y = 1 - x^2$, sumbu X, dan sumbu Y. Bila daerah D diputar mengelilingi garis $x = 1$ dan digunakan metode kulit tabung untuk menghitung volume benda putar, maka integrasi dilakukan ke-x. Untuk menentukan jari-jari kulit tabung dilakukan dengan menetukan sembarang nilai $r = x$ pada interval [0,1], sehingga jari-jari kulit tabung adalah jarak antara x ke sumbu putar (x = 1). Jadi jari-jari kulit tabung adalah $1 - x$, sedangkan tinggi kulit tabung adalah $h = 1 - x^2$. Perhatikan Gambar 30. Oleh karena itu, volume benda putar dituliskan dengan,

$$V = \int_0^1 2\pi\,(1 - x)(1 - x^2)\,dx$$



Gambar 30

Bagaimana penyelesaian lengkap dari integral di atas? Apakah permasalahan untuk mendapatkan volume benda putar di atas dapat dipecahkan dengan menggunakan metode cakram? Uraiakan. Apabila daerah D di atas diputar dua kali, putaran pertama mengeliling

garis $x = -1$ dan putaran kedua dengan sumbu putar garis $y = -1$, apakah menghasilkan volume yang sama? Jelaskan.