Rencana Pembelajaran

Learning Outcome

Setelah mengikuti proses pembelajaran ini, diharapkan mahasiswa dapat

1) Menentukan solusi pertidaksamaan aljabar
2) Menyelesaikan pertidaksamaan dengan nilai mutlak
3) Menentukan domain dan range dari fungsi khusus
4) Menentukan rumusan fungsi komposisi
5) Menetukan domain fungsi komposisi
6) Menyelesaikan limit fungsi di suatu titik
7) Menentukan nilai sehingga suatu fungsi kontinu
8) Menyelesaikan limit fungsi di tak hingga
9) Menyelesaikan limit fungsi tak hingga

Referensi

Untuk mendukung dan mempermudah dalam mempelajari materi integral dan penggunaannya, disarankan untuk menggunakan buku berikut

- Mursita, Danang. (2010). Matematika untuk Perguruan Tinggi. Rekayasa Sains. Bandung. http://biobses.com/judul-buku,300-matematika_untuk_perguruan_tinggi.html
- Turunan dan Penggunaan. http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-01sc-single-variable-calculus-fall-2010/1.-differentiation/

1 Sistem Bilangan Real

Anda mungkin masih mengenal beberapa bilangan berikut: -2, 0, 1/2, - 7/5, 2^{-3}, $\sqrt{10}$, $\sqrt[-4]{15}$, $\sqrt{-9}$. $\sqrt[-2]{-10}$. **Manakah di antara bilangan tersebut yang merupakan bilangan real? Mengapa bilangan tersebut dikatakan bilangan real? Jelaskan jawaban Anda**. Kalau sebuah bilangan bukan merupakan bilangan real maka dinamakan bilangan imajiner. Ada beberapa istilah bilangan yang lain yaitu bilangan bulat, bilangan pecah, bilangan rasional, bilangan irrasional. **Jelaskan pengertian beberapa istilah bilangan tersebut disertai contoh**.

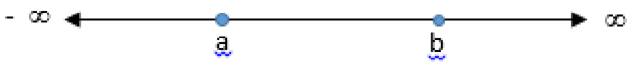
Bilangan real dinotasikan dengan $\Re$, memainkan peranan yang sangat penting dalam Kalkulus. Pertama kali Anda harus memahami beberapa fakta dan terminologi dari bilangan real. Sifat-sifat yang dimiliki bilangan real adalah **sifat trikotomi**, yaitu bila ada dua bilangan real a dan b, maka hanya akan berlaku salah satu dari tiga sifat berikut: (1) $a = b$ atau, (2) $a < b$ atau (3) $a > b$.

Perhatikan definisi berikut: Misal a dan b bilangan real, maka (1) $a < b$ berarti $b – a$ merupakan bilangan real positif, (2) $a \le b$ berarti bahwa $a < b$ atau $a = b$, (3) $a \ge b$ berarti bahwa $a > b$ atau $a = b$. Dalam matematika dan beberapa ilmu lain, kata “dan” dan “atau” mempumyai pengertian yang tidak sama. **Bilamana kata “dan” / “atau” digunakan?**

Berikan penjelasan. Berikut disampaikan sifat-sifat pertidaksamaan dari bilangan real yang sangat fundamental dan sering digunakan,

1. Bila $a < b$ dan $b < c$ maka a < c
2. Bila $a < b$ maka a + c < b + c atau a – c < b – c
3. Bila $a < b$ dan $c < d$ maka $a + c < b + d$
4. Bila $a < b$ dan $c > 0$ maka $ac < bc$
5. Bila $a < b$ dan $c < 0$ maka $ac > bc$
6. Bila a dan b keduanya bilangan real positif atau negatif dan $a < b$ maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Secara geometri, bilangan real $\Re$ dapat digambarkan sebagai garis bilangan. Bila digunakan notasi interval maka bilangan real dinyatakan dengan $\Re = (-\infty, \infty)$. Kalau garis bilangan dipenggal menjadi beberapa bagian maka penggalan tersebut kita sebut dengan himpunan bagian dari garis bilangan. Penggalan dari bilangan real ini berupa segmen garis atau interval yang dapat dikelompokkan menjadi (1) Interval Tutup, dinotasikan dengan $[\ldots,\ldots]$, (2) Interval Buka, dinotasikan dengan $(\ldots,\ldots)$, (3) Interval Setengah Buka / Setengah Tutup (Tutup Buka atau Buka Tutup), dinotasikan dengan $[\ldots,\ldots)$ atau $(\ldots,\ldots]$. Selengkapnya kemungkinan interval yang ada pada sebuah garis bilangan bila diberikan dua buah bilangan sembarang a dan b dinyatakan dengan Gambar 1 Berikut. Symbol ∞ bacalah dengan "tak hingga" sedangkan symbol - ∞ bacalah dengan " minus tak hingga". **Tugas Anda selanjutnya adalah menuliskan semua kemungkinan dari penggalan garis bilangan tersebut dengan menggunakan ketiga notasi di atas**.



Gambar 1. Garis Bilangan

2 Pertidaksamaan Aljabar

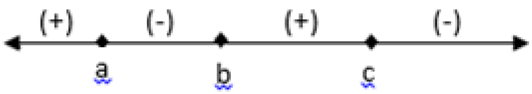
Permasalahan Matematika yang berkaitan dengan interval terletak pada pertidaksamaan aljabar. Contoh pertidaksamaan aljabar seperti: (1) $2 + x < 2x - 3$ (2) $x \geq x + 5$ (3) $\frac{x}{-x+2} > 5$ dan masih banyak lagi. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan aljabar (1) adalah $x > 5$ atau dalam notasi himpunan dapat dituliskan menjadi $(5, \infty)$. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa $(5, \infty)$ merupakan himpunan jawab atau himpunan solusi dari pertidaksamaan aljabar (1). Dari (2) maka tidak ditemukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan aljabat tersebut. **Mengapa? Coba Jelaskan jawaban Anda**. Oleh karena itu, pertidaksamaan aljabar (2) dikatakan tidak mempunyai himpunan jawab atau himpunan solusi. **Bagaimana dengan himpunan jawab dari pertidaksamaan aljabar (3)?**

Himpunan jawab atau solusi dari pertidaksamaan aljabar merupakan salah satu dari bentuk interval yang dikenalkan di alinea sebelumnya. Adapun penjelasan matematis tentang himpunan jawab atau himpunan solusi dari pertidaksamaan aljabar diberikan berikut. Bentuk umum pertidaksamaan aljabar dinyatakan oleh,

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$$

dengan $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ dan $D(x)$ merupakan suku banyak. **Apakah suku banyak tersebut? Jelaskan tentang suku banyak disertai contoh.** (tanda < dapat digantikan oleh $\leq, \geq, >$). Sebagai gambaran diberikan pertidaksamaan $\frac{x-2}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}$. Maka pertidaksamaan terdiri dari suku banyak $A(x) = x - 2$, $B(x) = x - 1$, $C(x) = x + 3$ dan $D(x) = x + 1$. Sedangkan untuk bentuk pertidaksamaan $x+1 \geq \frac{-1}{x-1}$ terdiri dari suku banyak $A(x) = x + 1$, $B(x) = 1$, $C(x) = -1$ dan $D(x) = x - 1$.

Cara mencari himpunan solusi dari pertidaksamaan aljabar dilakukan sebagai berikut: (1) Nyatakan pertidaksamaan aljabar sehingga didapatkan salah satu ruasnya menjadi nol. Misalkan ruas kanan dibuat menjadi nol. Maka didapatkan $\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{C(x)}{D(x)} < 0$. (2) Sederhanakan bentuk ruas kiri menjadi satu suku, misalkan $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$. **Bagaimana cara membuat ruas kiri menjadi satu suku? Jelaskan dan nyatakan *P(x)* dan *Q(x)* dalam notasi A(*x*), B(*x*), C(*x*) dan D(*x*).** (3) Cari dan gambarkan pada garis bilangan semua pembuat nol dari *P(x)* dan *Q(x)*. (4) Tentukan setiap tanda (+ atau -) pada setiap interval yang terjadi dari garis bilangan di atas. Misalkan pembuat nol dari *P(x)* dan *Q(x)* berturut-turut dari kecil ke besar adalah a, b dan c. Maka interval dan tanda pada setiap interval diperlihatkan oleh Gambar 2. Interval dengan tanda negative atau (-) merupakan solusi pertidaksamaan atau himpunan solusi. **Mengapa ? Selanjutnya tuliskan himpunan solusinya**.

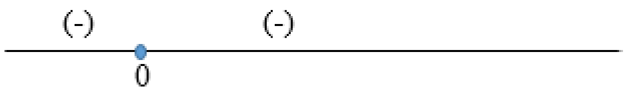


Gambar 2 Himpunan Solusi

Perhatikan pertidaksamaan aljabar berikut, $x+1 \geq \frac{-1}{x-1}$. Ada dua buah penyelesaian pertidakssamaan aljabar berikut. **Manakah diantara dua penyelesaian ini yang menurut anda yang benar? Jelaskan dengan pilihan Anda?**

- $(x+1)(x-1) \geq -1 \leftrightarrow x^2 \geq 0$

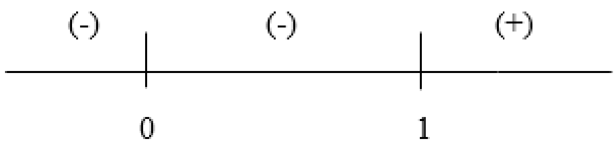
Pembuat nol dari pembilang dan penyebut adalah 0. Pada garis bilangan didapatkan nilai dari tiap selang, yaitu:



Himpunan penyelesaian (solusi) pertidaksamaan adalah $(-\infty, 0]$

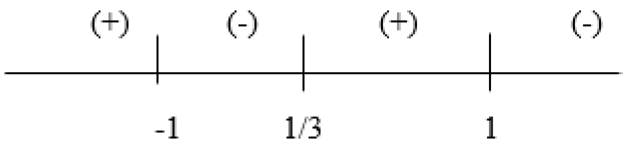
- $x+1 \geq \frac{-1}{x-1} \Leftrightarrow x+1+\frac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} \geq 0$

Pembuat nol dari pembilang dan penyebut adalah 0 dan 1. Pada garis bilangan didapatkan nilai dari tiap selang, yaitu:



Himpunan penyelesaian (solusi) pertidaksamaan adalah $\{0\} \cup (1, \infty)$

Sekarang Anda bisa berlatih dengan pertidaksamaan aljabar berikut, $\frac{x-2}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}$.
Penyelesaian dilakukan dengan cara : $\frac{x-2}{x-1} > \frac{x+3}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} > 0 \Leftrightarrow$ $\frac{-3x+1}{(x-1)(x+1)} > 0$, **Mengapa tidak diperbolehkan untuk dikalikan silang sehingga pertidaksamaan aljabar menjadi $(x-2)(x+1) > (x+3)(x-1)$? Jelaskan.** Pembuat nol dari pembilang dan penyebut adalah –1, 1/3 dan 1. Pada garis bilangan didapatkan nilai dari tiap selang, yaitu:



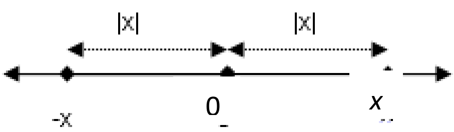
Himpunan penyelesaian (solusi) pertidaksamaan adalah $(-\infty, -1) \cup (1/3, 1)$

3 Pertidaksamaan dengan Nilai Mutlak

Secara geometris, **nilai mutlak** atau **nilai absolut** dari bilangan real x didefinisikan sebagai jarak dari x terhadap 0 – jarak tidak pernah dinyatakan dengan bilangan negatif - sehingga nilai mutlak dari setiap bilangan selalu bernilai positif. Notasi yang digunakan adalah:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Bentuk nilai mutlak $|x|$ dinyatakan oleh gambar berikut,



Bila diberikan bentuk nilai mutlak $|x - 2|$ maka dapat dituliskan menjadi atau dapat disederhanakan menjadi seperti berikut, $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$. **Lantas, Nyatakan bentuk $|x - 2|$ dalam bentuk gambar**. Bentuk nilai mutlak dapat diperumum menjadi:

$|ax-b| = \begin{cases} ax+b & ,x \ge -b/a \\ -(ax+b) & ,x < -b/a \end{cases}$; $a \neq 0$. Berikut merupakan contoh bentuk terakhir, yaitu nilai mutlak|-2x + 4|yang dapat diuraikan menjadi,

$$|-2x+4| = \begin{cases} -2x+4, -2x+4 \ge 0 \\ -(-2x+4), -2x+4 < 0 \end{cases} \text{ atau } |-2x+4| = \begin{cases} -2x+4, x \le 2 \\ 2x-4,\ x > 2 \end{cases}$$

Selanjutnya Anda diminta untuk mempelajari sifat-sifat nilai mutlak berikut dan penerapannya pada masalah pertidaksamaan aljabar.

1. $|x| = \sqrt{x^2}$
2. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
3. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$
4. $|x + y| \le |x| + |y|$ (ketidaksamaan segitiga)
5. $|x\,y| = |x||y|$
6. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$
7. $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

Bagaimana Anda menyelesaikan pertidaksamaan aljabar berikut, kemudian tunjukkan sifat-sifat dari nilai mutlak mana yang digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan aljabar ini?

1. $|2x - 5| < 1$
2. $|-x + 2| > 3$
3. $\dfrac{1}{|x-2|} - \dfrac{1}{|x+3|} \ge 0$

Perhatikan bentuk pertidaksamaan aljabar ini (1) $|x - 2| - 2x \le 3$ dan (2) $|x + 1| - |2x - 1| < 1$, keduanya tidak dapat diselesaikan hanya dengan menggunakan sifat-sifat nilai mutlak, namun dengan menggunakan definisi nilai mutlak, pertidaksamaan aljabar ini dapat diselesaikan pada setiap interval yang terjadi.

1. Pertama yang dilakukan adalah dengan menguraikan bentuk nilai mutlak $|x - 2|$, menjadi $|x-2| = \begin{cases} x-2,\ x-2 \ge 0 \\ -(x-2), x-2 < 0 \end{cases}$ atau $|x-2| = \begin{cases} x-2,\ x \ge 2 \\ -x+2, x < 2 \end{cases}$. Pertidaksamaan diselesaikan pada interval yang terjadi yaitu pada $x \ge 2$ dan $x < 2$.

Untuk $x < 2$	Untuk $x \ge 2$
$\lvert x - 2\rvert - 2x \le 3$	$\lvert x - 2\rvert - 2x \le 3$
$-x + 2 - 2x \le 3$	$x - 2 - 2x \le 3$
$-3x \le 1$	$-x \le 5$
$x \ge -1/3$	$x \ge -5$

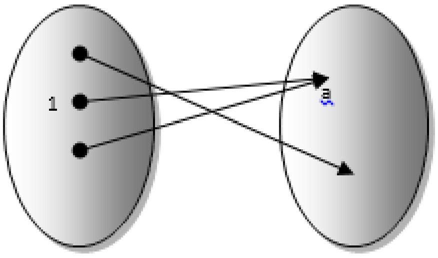
Solusi pada interval ini adalah irisan dari $x < 2$ dan $x \geq -1/3$, yaitu $-1/3 \leq x < 2$	Solusi pada interval ini adalah irisan dari $x \geq 2$ dan $x \geq -5$, yaitu $x \geq 2$

Solusi pertidaksamaan merupakan gabungan dari $-1/3 \leq x < 2$ dan $x \geq 2$, yaitu $-1/3 \leq x$ atau $[-1/3, \infty)$.

2. Seperti sebelumnya, pertidaksamaan diselesaikan dengan terlebih dahulu menguraikan bentuk nilai mutlak yang ada. Bentuk nilai mutlak yang ada pada pertidaksamaan adalah $|x+1| = \begin{cases} x+1 & ,x \geq -1 \\ -x-1 & ,x < -1 \end{cases}$ dan $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & ,x \geq \tfrac{1}{2} \\ -2x+1 & ,x < \tfrac{1}{2} \end{cases}$. Dari sini kita dapatkan tiga buah interval yang akan digunakan untuk mendapatkan solusi pertidaksamaan, yaitu: (-∞, -1), [-1, ½) dan [½ , ∞). **Untuk interval (-∞, -1).** Maka bentuk pertidaksamaan nilai mutlak berubah menjadi: $-x - 1 - (-2x + 1) < 1$ atau $x < 3$ atau (-∞, 3). Solusi merupakan irisan antara interval (-∞, -1) dan (-∞, 3) yaitu: (-∞,-1). b. **Untuk interval [-1, ½).** Bentuk pertidaksamaan berubah menjadi: $x + 1 - (-2x + 1) < 1$ atau $x < 1/3$ atau (-∞, 1/3). Solusi merupakan irisan antara interval [-1, ½) dan (-∞, 1/3) yaitu: [-1, 1/3). **Untuk interval [½ , ∞).** Bentuk pertidaksamaan berubah menjadi: $x + 1 - (2x - 1) < 1$ atau $x > 1$ atau (1,∞). Solusi merupakan irisan antara interval [½, ∞) dan (1, ∞) yaitu: (1, ∞). Jadi solusi dari pertidaksamaan nilai mutlak merupakan gabungan solusi di atas (a, b dan c) yaitu: $(-\infty,-1) \cup [-1, 1/3) \cup (1, \infty)$ atau $(-\infty, 1/3) \cup (1, \infty)$. **Coba kerjakan dengan menggunakan bahasa atau alur sendiri khusus untuk masalah ini**.

4 Fungsi dan Grafik

Pembahasan mengenai fungsi tidak bisa dilepaskan dari masalah pemetaan atau pengaitan. Suatu pengaitan *f* dari himpunan *a* ke himpunan B disebut **fungsi** bila mengaitkan setiap anggota dari himpunan *a* dengan tepat satu anggota dari himpunan B. Hal ini diperlihatkan seperti pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3 Fungsi

Himpunan *a* disebut **domain** atau **daerah asal** dari fungsi *f* dinotasikan D_f, sedangkan himpunan B disebut **kodomain** dari fungsi *f*. Bila semua elemen dari himpunan B yang merupakan pasangan dari elemen dari himpunan *a* dihimpun maka akan didapatkan himpunan yang merupakan sub himpunan atau himpunan bagian dari himpunan B yang dinamakan **Range** atau **daerah hasil** dari fungsi *f*. Notasi untuk range dari fungsi *f* adalah R_f. Dari gambar 3 di atas`maka didapatkan range dari fungsi *f* yaitu $R_f = \{a, c\}$. **Buatlah gambar yang menunjukkan bahwa pengaitan yang Anda**

buat mendefinisikan fungsi dan bukan fungsi. Apakah banyak anggota dari domain harus sama dengan banyak anggota range? Jelaskan.

Misal himpunan *a* dan B merupakan sub himpunan dari himpunan bilangan Real (A $\subseteq \Re$ dan B $\subseteq \Re$). Maka fungsi *f* yang memetakan dari himpunan *a* ke himpunan B dapat dinyatakan dengan,

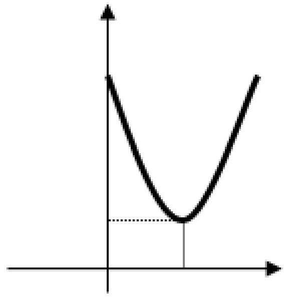
$$f: a \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x) = y$$

Daerah hasil atau range dari fungsi *f* dinyatakan dengan $R_f = \{y \mid f(x) = y, x \in A\}$. Nampak bahwa setiap anggota range dari fungsi *f(x)* juga merupakan anggota dari B sehingga $R_f \subseteq B$. Perhatikan fungsi $f(x) = \sqrt{2x-6}$. Akan dicari nilai *x* sehingga nilai fungsi *f(x)* terdefinisi (merupakan bilangan real) . Ini dimungkinkan bilamana didalam tanda akar harus merupakan bilangan nol atau positif, yaitu $2x - 6 \geq 0$ atau $x \geq 3$. Jadi domain dari fungsi *f(x)* adalah $D_f = \{x | x \geq 3\} = [3, \infty)$. Bila nilai *x* dari D_f disubstitusikan ke dalam fungsi *f(x)* maka akan didapatkan range dengan anggota paling rendah nol dan paling tinggi tak hingga atau $R_f = \{y | y \geq 0\} = [0, \infty)$.

5 Fungsi Polinom

Bentuk umum fungsi polinom (suku banyak) **order** atau **pangkat** *n* (*n* bilangan bulat positif) dinyatakan oleh $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ dengan $a_n \neq 0$. Berikut bentuk khusus dari fungsi polinom, yaitu:

- Fungsi konstan: *f(x)* = a_0. Domain (daerah asal) dari fungsi konstan adalah bilangan Real $(D_f = \Re)$ sedangkan range (daerah hasil) adalah $R_f = \{a_0\}$
- Fungsi Linear: $f(x) = a_0 + a_1 x$. (*f(x)* = *x*: fungsi identitas). Domain dan range dari fungsi linear adalah Real $(D_f = \Re$ dan $R_f = \Re)$
- Fungsi Kuadrat: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$



Gambar 4 Parabola

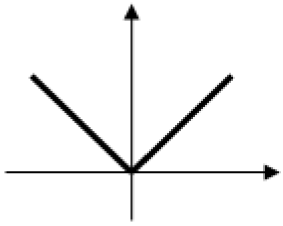
Diperlihatkan pada Gambar 4, yang merupakan grafik dari fungsi kuadrat (berupa parabola). Bila dari parabola diketahui titik puncak dan sebuah titik yang lain maka persamaan fungsi kuadrat dapat dinyatakan oleh $f(x) = a(x-b)^2 + c$, dengan (*b*,*c*) merupakan titik puncak. Dari Gambar 5, maka didapatkan persamaan kuadrat, $f(x) = \frac{3}{4}(x-2)^2 + 1$. Dengan melakukan pengamatan pada grafik / parabola maka range dari fungsi kuadrat tersebut berturut-turut adalah $\Re$ dan [1, ∞). **Bagaimana dengan domain dari *f(x)*? jelaskan mengapa range dari *f(x)* adalah [1, ∞)?** Melihat dari sifat dari fungsi konstan, fungsi linear dan fungsi kuadrat maka dapat disimpulkan bahwa domain dari fungsi polinom adalah bilangan real $\lfloor D_f = \Re \rfloor$. **Mengapa? Jelaskan jawaban Anda**.

6 Fungsi Rasional

Bentuk umum fungsi rasional adalah $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ dengan *p(x)* dan *q(x)* merupakan fungsi polinom. Fungsi rasional *f(x)* tidak terdefinisi pada nilai *x* yang menyebabkan penyebut sama dengan nol [*q(x)* = 0]. Sedangkan pembuat nol dari pembilang *p(x)* tetapi bukan pembuat nol penyebut *q(x)* merupakan pembuat nol dari fungsi rasional *f(x)*. Domain dari fungsi rasional *f(x)* adalah bilangan real kecuali pada pembuat nol penyebut *q(x)*, atau dapat dituliskan, $D_f = \Re - \{x | q(x) = 0\}$. Perhatikan fungsi rasional berikut, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$. Nilai yang membuat fungsi *f(x)* bernilai nol adalah hanya $x = 1$, **Mengapa?** Pembuat nol dari penyebut adalah {-2, 2} sehingga domain dari *f(x)* adalah $D_f = \Re - \{-2, 2\}$. **Bagaimana Anda menjelaskan tentang hal ini?**

7 Fungsi bernilai mutlak

Bentuk dasar fungsi bernilai mutlak dinyatakan oleh *f(x)* = |*x*|. Grafik fungsi *f(x)* simetris terhadap sumbu Y dan terletak di atas dan atau pada sumbu *X* seperti terlihat pada Gambar 5. Hal ini menunjukkan bahwa $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in D_f$, sehingga domain dari *f(x)* adalah $R_f = [0, \infty)$. Secara umum fungsi bernilai mutlak dapat dinyatakan oleh: $f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & , x \in A \\ -g(x) & , x \in A^C \end{cases}$; $D_f = A \cup A^C$. Kesimpulannya adalah range dari fungsi bernilai mutlak yaitu $[0, \infty)$.



Gambar 5

Bagaimana menentukan nilai *x* agar grafik fungsi $f(x) = |x^2 + 1|$ terletak di bawah garis *y* = 2? Gambarkan terlebih dahulu grafik fungsi *f(x)* dan garis y = 2. Selanjutnya himpun nilai *x* yang memenuhi $|x^2 + 1| < 2$. Sekarang bandingkan hasil yang ada peroleh dengan hasil berikut. Menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak $|x^2 + 1| < 2 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 < 4$ didapatkan $(x^2 + 3)(x^2 - 1) < 0$. Sebab $x^2 + 3$ definit positif yaitu selalu bernilai positif untuk setiap *x* real maka $x^2 - 1 < 0$. Sehingga nilai *x* yang memenuhi adalah $-1 < x < 1$ atau $|x| < 1$.

8 Fungsi banyak Aturan

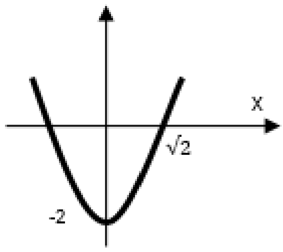
Fungsi ini merupakan bentuk pengembangan dari fungsi bernilai mutlak, untuk fungsi dengan dua aturan dinyatakan oleh: $f(x)=\begin{cases} f_1(x)\ , & x\in A \\ f_2(x) & , x\in A^C \end{cases}$; $A\cup A^C = D_f$. Fungsi banyak aturan dapat dikembangkan sampai n buah fungsi $f_j(x)$ dengan j = 1,2,…,n, yaitu

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & ;x\in A_1 \\ f_2(x) & ;x\in A_2 \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ f_n(x) & ;x\in A_n \end{cases} \quad \text{dengan } A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n = D_f \text{ dan } A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\phi$$

Untuk memudahkan di dalam memahami fungsi banyak aturan lakukan langkah berikut. Gambarkan grafik fungsi dari $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & ;x\le 2 \\ 1 & ;2<x\le 3 \\ 1-x & ;x>3 \end{cases}$.

9 Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi *f(x)* disebut **fungsi genap** bila *f(x)* = f(-*x*) untuk setiap *x* di domain *f(x)* [grafik *f(x)* simetris terhadap sumbu y]. Fungsi *f(x)* disebut **fungsi ganjil** bila *f(x)* = - *f*(-*x*) untuk setiap *x* di domain *f(x)* [grafik *f(x)* simetris terhadap titik pusat atau pusat sumbu]. Bila suatu fungsi bukan merupakan fungsi genap maka belum tentu merupakan fungsi ganjil. Grafik fungsi $f(x)=x^2-2$ ditunjukkan oleh Gambar 6. Sebab simetris terhadap sumbu Y maka fungsi $f(x)=x^2-2$ terkategori fungsi genap.



Gambar 6 Parabola $f(x)=x^2-2$

Manakah diantara fungsi berikut yang merupakan fungsi genap, ganjil atau bukan keduanya $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x}$ dan $f(x)=x^2-2x+1$. Langkah mana yang Anda lakukan untuk menentukan fungsi genap, fungsi ganjil atau tidak keduanya? Apakah Anda punya cara lain ?

Sifat – sifat aljabar yang dimiliki antara fungsi genap dan fungsi ganjil diperlihatkan pada tabel berikut. Tabel yang ada belum lengkap sebab masih ada kotak yang belum terisi. **Langkah selanjutnya, Anda diminta mengisi tabel yang kosong dan membuat contoh fungsi yang bersesuaian serta hasil kali dan pembagian dari kedua fungsi tersebut**.

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)\ g(x)$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$
Genap	Genap		
Genap	Ganjil		
Ganjil	Genap		
Ganjil	**Ganjil**		

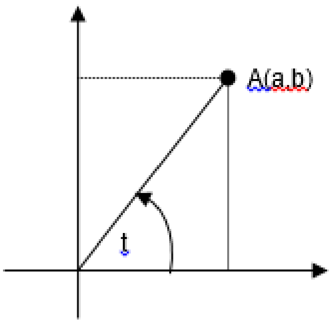
10 Fungsi Trigonometri

Misal diberikan titik A(a,b) dan t menyatakan sudut yang dibentuk antara sumbu X positif dengan ruas garis OA, t bertanda positif (+) bila berlawanan arah jarum jam (arah dari sumbu X positif menuju ke ruas garis OA) diperlihatkan pada Gambar 7. Bila panjang ruas garis OA = r maka didapatkan rumusan bentuk trigonometri sebagai berikut:

$$\sin t = \frac{a}{r} \qquad \csc t = \frac{r}{a}$$

$$\cos t = \frac{b}{r} \qquad \sec t = \frac{r}{b}$$

$$\tan t = \frac{a}{b} \qquad \cot t = \frac{b}{a}$$

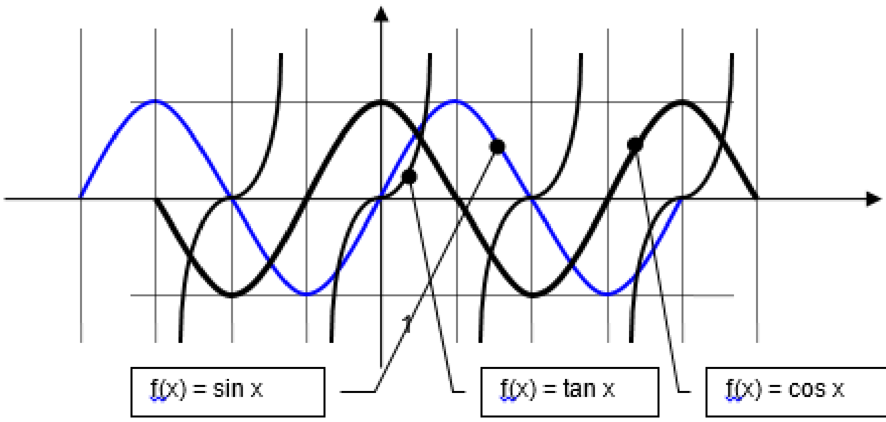


Gambar 7

Dari rumusan trigonometri tersebut maka dapat dinyatakan bentuk dasar dari fungsi trigonometri sebagai berikut

- $f(x) = \sin x$ $\qquad f(x) = \csc x$
- $f(x) = \cos x$ $\qquad f(x) = \sec x$
- $f(x) = \tan x$ $\qquad f(x) = \cot x$

Domain dari fungsi sinus dan fungsi cosinus adalah bilangan real sedangkan domain dari fungsi tangen adalah $\Re - \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{2} \right\}$ dengan n bilangan bulat. **Mengapa? Jelaskan**. Grafik fungsi *f(x)* = sin *x*, *f(x)* = cos *x* dan *f(x)* = tan *x* diperlihatkan pada Gambar 8 berikut



Gambar 8 Grafik Fungsi Trigonometri

Beberapa persamaan atau identitas yang berlaku pada fungsi trigonometri diberikan berikut. **Bagaimana Anda menjelaskan tanpa harus menghafal terhadap identitas trigonometri ini?**

1. sin (-*x*) = - sin *x*
2. cos (-*x*) = cos *x*
3. tan (-*x*) = - tan *x*
4. csc (-*x*) = - csc *x*
5. sec (-*x*) = sec *x*
6. cot (-*x*) = cot *x*
7. sin (π/2 - *x*) = cos *x*
8. cos (π/2 - *x*) = sin *x*
9. tan (π/2 - *x*) = cot *x*
10. sin (*x* + y) = sin *x* cos y + sin y cos *x*
11. cos (*x* + y) = cos *x* cos y – sin *x* sin y
12. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \ \tan y}$
13. sin (*x* - y) = sin *x* cos y – sin y cos *x*
14. cos (*x* - y) = cos *x* cos y + sin *x* sin y
15. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \ \tan y}$
16. sin 2*x* = 2 sin *x* cos *x*
17. cos 2*x* = 2 cos^2*x* –1 = 1 – 2 sin^2*x*
18. $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
19. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
20. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

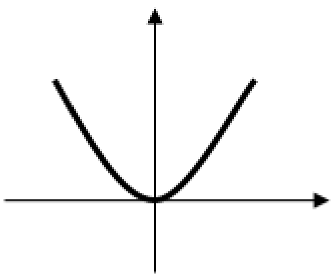
21. $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
22. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
23. $\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
24. $\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$
25. $\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$

11 Fungsi Periodik

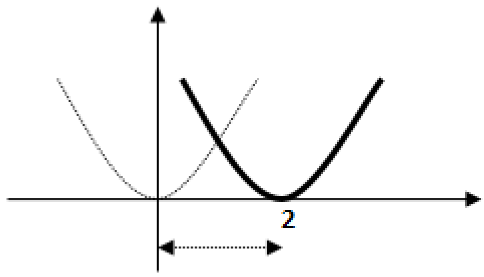
Fungsi *f(x)* disebut **fungsi periodik** jika ada bilangan real positif *p* sehingga berlaku $f(x+p) = f(x)$ untuk setiap *x* di domain *f(x)*. Nilai *p* terkecil disebut **periode** dari *f(x)*. Fungsi dasar trigonometri merupakan fungsi periodik dengan periode *p* , yaitu: $f(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = ... = f(x + 2\pi) = f(x + 4\pi) = ...$ Nilai p terkecil merupakan periode dari $f(x) = \sin x$ yaitu $p = 2\pi$. Dengan pengertian yang sama diberikan periode untuk fungsi cosinus dan fungsi tangen berikut: (1) $f(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi) = f(x + 2\pi)$, $p = 2\pi$ dan (2) $f(x) = \tan x = \tan(x + \pi) = f(x + \pi)$, $p = \pi$. **Bagaimana cara Anda menentukan periode dari fungsi berikut (1) $f(x) = \sin nx$ (2) $f(x) = \cos nx$ dan (3) $f(x) = \tan nx$?**

12 Translasi (Pergeseran)

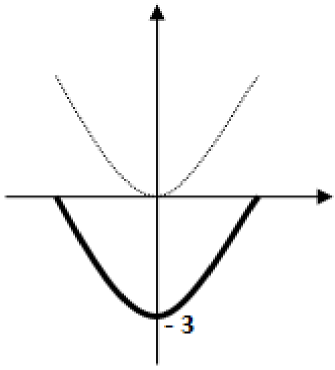
Bila grafik fungsi *f(x)* digeser ke kanan / ke kiri (searah atau sejajar sumbu *x*) sepanjang *k* maka hasil pergeseran merupakan grafik dari fungsi $f(x - k)$. Bila grafik fungsi *f(x)* digeser ke atas / ke bawah (searah atau sejajar sumbu Y) sepanjang *a* maka hasil pergeseran merupakan grafik fungsi $f(x) + a$. Sebagai ilustrasi, misal diberikan fungsi $f(x) = x^2$. Grafik fungsi tersebut berupa parabola dengan titik minimum di pusat sumbu (Gambar 9). Bila grafik kita geser ke kanan sepanjang 2 satuan maka parabola mempunyai titik minimum di (2,0) dan fungsi dinyatakan dengan $f(x) = (x-2)^2$ (Gambar 10). Sedangkan hasil pergeseran grafik ke arah bawah sepanjang 3 satuan menghasilkan para bola dengan titik minimum di (0,3) dan dinyatakan dengan $f(x) = x^2 - 3$ (Gambar 11). Oleh karena itu grafik fungsi $f(x) = (x - 2)^2 - 3$ berupa parabola dengan titik minimum di (2,-3) yang merupakan pergeseran grafik $f(x) = x^2$ sepanjang 2 satuan ke arah kanan dan 3 satuan ke arah bawah (Gambar 12).



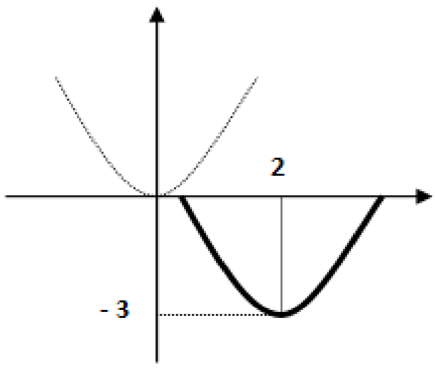
Gambar 9 Parabola $y = x^2$



Gambar 10 Parabola $y = (x-2)^2$



Gambar 11 Parabola $y = x^2 - 3$

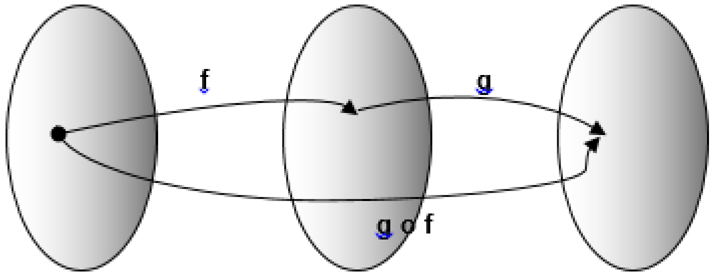


Gambar 12 Parabola $y = (x-2)^2 - 3$

Bagaimana cara yang Anda lakukan bila diberikan sebuah parabola dengan persamaan $f(x) = 2x^2 + 6x - 8$, merupakan pergeseran dari parabola $f(x) = x^2$? Jelaskan jawaban Anda.

13 Fungsi Komposisi

Misal diberikan fungsi *f* yang memetakan dari himpunan *a* ke himpunan B, *f*: *a* → B dan fungsi *g* yang memetakan dari himpunan B ke himpunan C, *g*: B → C. Maka dapat dilakukan komposisi antara fungsi *f* dan fungsi *g* yang diperlihatkan pada Gambar 13 berikut.



Gambar 13 Fungsi Komposisi

Dari Gambar 13 nampak bahwa agar dua fungsi *f* dan *g* dapat dilakukan komposisi (*g o f*) maka fungsi tersebut harus " tersambung ". Ini berarti ada dua kemungkinan: (1) Range dari *f* harus termuat di dalam domain dari *g* yaitu $f(a) = b \in D_g$ atau (2) Domain dari *g* harus termuat di dalam range dari *f* yaitu $b \in R_f$. Hal ini menunjukkan bahwa agar terjadi komposisi antara fungsi *f* dan fungsi *g*, [*g o f*] maka harus dipenuhi syarat bahwa ada anggota yang termuat di dalam range dari $f, (R_f)$ dan juga termuat di dalam domain dari *g*, (D_g). Dengan kata lain bahwa untuk terjadi komposisi $g\ o\ f$ maka syarat yang harus dipenuhi adalah $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, yaitu irisan antara range dari fungsi *f* dan domain dari fungsi *g* tidak boleh kosong, sehingga dapat didefinisikan **Komposisi Dua Fungsi.** Komposisi antara fungsi *f(x)* dan fungsi *g(x)* didefinisikan sebagai (1) $g(x)\, o\, f(x) = (g\ o\ f)(x)$ dengan syarat $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ atau (2) $f(x)\, o\, g(x) = (f\ o\ g)(x)$ dengan syarat $R_g \cap D_f \neq \emptyset$

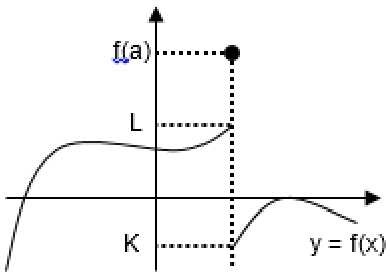
Anda Pasti masih ingat bagaimana cara mencari domain dan range dari dua fungsi berikut, $f(x) = \sqrt{1-x}$ dan $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$. **Bagaimana Anda menentukan bahwa *g o f* terdefinisi dan *f o g* terdefinisi? Bila ya, tentukan rumusan kedua fungsi komposisi tersebut**.

Untuk lebih memudahkan Anda mempelajari komposisi dua fungsi, sebaiknya ada fahamkan diri Anda terhadap sifat – sifat yang dimiliki oleh fungsi komposisi berikut. **Berikan contoh yang mendukung sifat – sifat tersebut.**

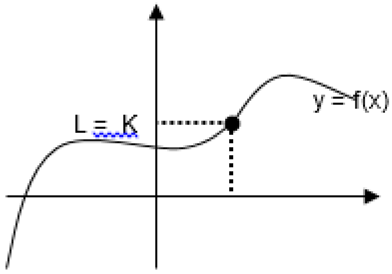
1. $f\ o\ g \neq g\ o\ f$ (tidak berlaku sifat komutatif)
2. *(f o g) o h = f o (g o h)* (berlaku sifat asosiatif)
3. Untuk setiap komposisi *g o f* maka akan berlaku : $D_{g\,o\,f} \subseteq D_f$ dan $D_g \subseteq R_f$
4. Bila $R_f \subseteq D_g$ maka $D_{gof} = D_f$

14 Limit Fungsi

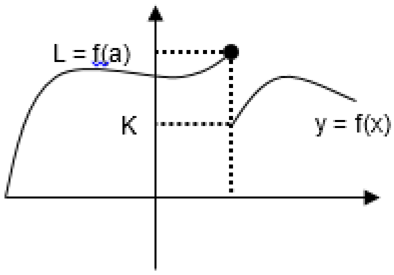
Pengertian dan notasi dari limit suatu fungsi *f(x)* di suatu nilai *x* = *a* diberikan secara intuitif menggunakan bantuan Gambar 14 sd Gambar 18 berikut.



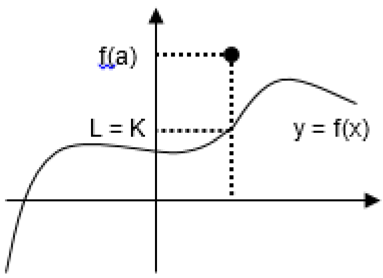
Gambar 14



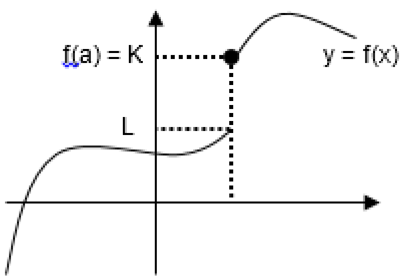
Gambar 15



Gambar 16



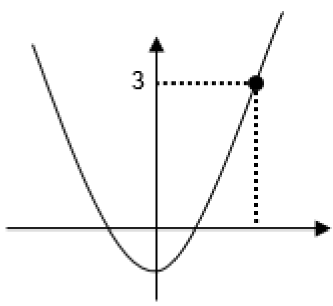
Gambar 17



Gambar 18

Dari Gambar 14, bila nilai *f(x)* mendekati L untuk nilai *x* mendekati *a* dari arah kanan maka dikatakan bahwa limit fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati *a* dari kanan $\left(x \to a^{+}\right)$ sama dengan L dan dinotasikan (1) $\lim_{x \to a^{+}} f(x) = L$. Bila nilai *f(x)* mendekati *K* untuk nilai *x* mendekati *a* dari arah kiri maka dikatakan bahwa limit fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati *a* dari arah kiri $\left(x \to a^{-}\right)$sama dengan *K* dan dinotasikan (2) $\lim_{x \to a^{-}} f(x) = K$. Bila $L = K$ (Gambar 15 dan Gambar 17) maka dikatakan bahwa limit fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati *a* $(x \to a)$ sama dengan L (nilai limit dari *f(x)* di *x* = *a* ada dan sama dengan *L*) dan dinotasikan (3) $\lim_{x \to a} f(x) = L$. Sedangkan bila L ≠ K (Gambar 16 dan Gambar 18) maka dikatakan bahwa limit fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati *a* tidak ada. Bentuk (1.1) dan (1.2) disebut **limit sepihak**. Sedangkan (3) mengisyaratkan bahwa nilai limit fungsi *f(x)* pada suatu titik dikatakan ada bila nilai limit sepihaknya sama atau nilai limit kanan (1.1) sama dengan nilai limit kiri (1.2). Dari keberadaan limit sebuah fungsi, nilai limit fungsi *f(x)* di *x* = *a* tidak selamanya sama dengan nilai fungsi *f(x)* di *x* = *a* atau *f(a)*. Gambar 18 menunjukkan nilai limit dari fungsi *f(x)* di *x* = *a* ada namun tidak sama dengan *f(a)*, $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq f(a)$. Limit fungsi *f(x)* di titik *x* = *a* tidak ada sebab nilai limit kanan dari *f(x)* di *x* = *a* tidak sama dengan nilai limit kiri dari *f(x)* di *x* = *a*, diperlihatkan pada Gambar 14, Gambar 16, dan Gambar 18. Gambar 15 dan Gambar 17 memperlihatkan nilai limit dari *f(x)* di *x* mendekati *a* dari arah kiri sama dengan nilai fungsi *f(x)* di *x* = *a*, $\lim_{x \to a^{-}} f(x) = f(a)$. Gambar 15 memperlihatkan nilai limit dari *f(x)* di *x* mendekati *a* dari kanan sama dengan nilai fungsi *f(x)* di *x* = *a*, $\lim_{x \to a^{+}} f(x) = f(a)$ dan Gambar 17 memperlihatkan bahwa nilai limit kanan maupun nilai limit kiri tidak sama dengan nilai fungsi *f(x)* di *x* = *a*. Kesimpulan yang dapat diambil dari penjelasan tentang limit di atas adalah (1) Nilai limit sebuah fungsi di suatu titik bisa ada dan tidak ada dan (2) Bila nilai limit sebuah fungsi ada maka ada dua kemungkinan yaitu nilai limit sama dengan nilai fungsi dan nilai limit tidak sama dengan nilai fungsi.

Dalam melakukan perhitungan limit dari fungsi *f(x)* di *x* = *a* dilakukan dengan mensubstitusikan nilai *x* = *a* terhadap fungsi *f(x)* namun sebetulnya nilai yang dimaksud adalah nilai pendekatan. Contoh berikut menjelaskan perhitungan sederhana terhadap limit fungsi berikut, $\lim_{x \to 2}\left(x^{2}-1\right)$. Misal $f(x) = x^{2} - 1$. Untuk *x* mendekati 2 baik dari kanan maupun dari kiri $\left(x \to 2\right)$ maka nilai fungsi *f(x)* mendekati 3 $\left(f(x) \to 3\right)$ (Gambar 19). Jadi dapat dituliskan $\lim_{x \to 2}\left(x^{2}-1\right) = 3$. Kita bandingkan penjelasan di atas dengan mensubstitusikan nilai *x* = 2 pada fungsi *f(x)* maka akan didapatkan hasil yang sama, yaitu $\lim_{x \to 2}\left(x^{2}-1\right) = \lim_{x \to 2}\left(2^{2}-1\right) = \lim_{x \to 2} 3 = 3$



Gambar 19

Untuk fungsi sederhana, hal ini dapat dilakukan namun untuk beberapa bentuk fungsi yang lain maka langkah dengan cara mensubstitusikan tidak dapat langsung diterapkan begitu saja. **Bagaimana Anda membuat contoh perhitungan limit fungsi yang ternyata cara substitusi menhasilkan jawaban yang salah?** Hal ini mungkin dilakukan bila nilai fungsi setelah disubstitusikan terdefinisi, yaitu diperoleh bilangan yang bukan berbentuk nol per nol atau bentuk tak tentu yang lain. Limit dengan bentuk demikian (bentuk tak tentu) akan dibahas pada sub bab selanjutnya.

Berikut sifat-sifat limit fungsi, **selanjutnya tugas Anda membuat contoh fungsi *f(x)* dan fungsi g(*x*) yang memenuhi sifat tersebut.** Misal $\lim_{x\to a} f(x) = L \, dan \lim_{x\to a} g(x) = G$, maka (1) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = L+G$ (2) $\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = L-G$ (3) $\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = LG$ (4) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{G}, bila\, G\neq 0$ (5) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ untuk L > 0 bila n genap. Sebagai catatan bahwa sifat-sifat di atas juga berlaku untuk limit sepihak (limit kiri dan limit kanan).

Bagaimana cara yang Anda lakukan untuk menguji keberadaan limit dari fungsi (1) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ 2x, & x<1 \end{cases}$, dan (2) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$? Jelaskan langkah-langkah yang anda lakukan. Bagaimana cara yang harus Anda lakukan untuk mendapatkan nilai *a* dan *b* agar fungsi $f(x) = \begin{cases} 2x-a & ; x<-3 \\ ax+2b & ; -3\leq x\leq 3 \\ b-5x & ; x>3 \end{cases}$ **limitnya ada di *x* = - 3 dan *x* = 3?**

15 Kekontinuan Fungsi

Pada pembahasan limit fungsi, nilai limit fungsi di suatu titik kadangkala sama dengan nilai fungsi di titik tersebut. Grafik fungsi yang demikian dinamakan grafik fungsi yang kontinu. Pengertian formal dari fungsi kontinu diberikan berikut. Fungsi *f(x)* dikatakan **kontinu** pada suatu titik *x* = *a* bila nilai limit *f(x)* pada *x* mendekati *a* sama dengan nilai fungsi di *x* = *a* atau *f(a)*. Secara lebih jelas, *f(x)* dikatakan kontinu di *x* = *a* bila berlaku (1) *f(a)* terdefinisi atau $f(a) \in \Re$ (2) $\lim_{x\to a} f(x)$ ada, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ dan (3) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Bila minimal salah satu dari persyaratan di atas tidak dipenuhi maka *f(x)* dikatakan tidak kontinu atau **diskontinu** di *x* = *a* dan titik *x* = *a* disebut **titik diskontinu**. Secara geometris, grafik fungsi kontinu tidak ada loncatan atau tidak terputus. Bilamana kita menggambarkan suatu grafik fungsi sembarang dengan menggerakkan pensil kita di atas kertas dan tanpa pernah mengangkat pensil tersebut sebelum selesai maka akan kita dapatkan fungsi kontinu. Perhatikan fungsi $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x\geq -1 \\ \frac{x^2-2x-3}{x+1}, & x<-1 \end{cases}$.

Untuk menentukan nilai fungsi di *x* = -1 maka digunakan rumusan fungsi *f(x)* = 2*x* -1 sehingga nilai fungsi *f(x)* di *x* = -1 yaitu *f*(-1) = -3. Kemudian limit sepihak ditentukan sebagai berikut,

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} (x-3) = -4$ dan $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (2x-1) = -3$. Sebab nilai limit kanan tidak sama dengan nilai limit kiri maka nilai limit fungsi *f(x)* di *x* = -1 tidak ada. Jadi fungsi tidak kontinu di *x* = -1 atau dapat dikatakan bahwa *x* = -1 merupakan titik diskontinu dari *f(x)*. Cara lain yang dapat digunakan untuk menentukan kekontinuan dari fungsi dengan dua aturan seperti contoh di atas dapat dilakukan dengan lebih sederhana. Nilai fungsi *f(x)* di *x* = -1 akan sama dengan nilai limit *f(x)* untuk *x* mendekati -1 dari arah kanan, sehingga kekontinuan fungsi dapat ditentukan apakah nilai fungsi di *x* = -1 sama dengan nilai limit dari *f(x)* untuk *x* mendekati -1 dari arah kiri.

16 Kekontinuan Fungsi pada Interval

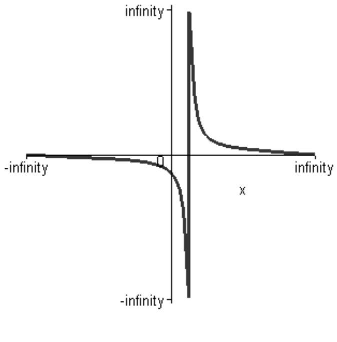
Fungsi *f(x)* dikatakan **kontinu pada interval buka** (*a*,*b*) bila *f(x)* kontinu pada setiap titik di dalam interval tersebut, Sedangkan *f(x)* dikatakan **kontinu pada interval tutup** [*a*,*b*] bila (1) *f(x)* kontinu pada (*a*,*b*), (2) *f(x)* kontinu kanan di *x* = *a* $\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\right)$ dan (3) *f(x)* kontinu kiri di *x* = *b* $\left(\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)\right)$. Bila *f(x)* kontinu untuk setiap nilai $x \in \Re$ maka dikatakan *f(x)* kontinu atau kontinu dimana-mana . **Bagaimana cara menetukan nilai k agar fungsi** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2kx+1}{x+1}, & x < -1 \\ x^2-1, & x \ge -1 \end{cases}$ **kontinu di *x* = -1? Jelaskan langkah-langkah yang Anda buat.**

17 Limit Tak Hingga dan Limit di Tak Hingga

Dalam sub bab ini pengertian limit tak hingga dan limit di tak hingga dijelaskan secara intuisi diberikan melalui contoh berikut. Misal diberikan fungsi $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Maka Nilai fungsi *f(x)* untuk beberapa nilai *x* yang mendekati 1 baik dari kanan maupun dari kiri diberikan pada tabel berikut,

x	...	0,9	0,99	0,999	....	1	...	1,001	1,01	1,1	...
f(x)	...	-10	-100	-1000	...	**td**	...	1000	100	10	

Catatan: td = tidak terdefinisi



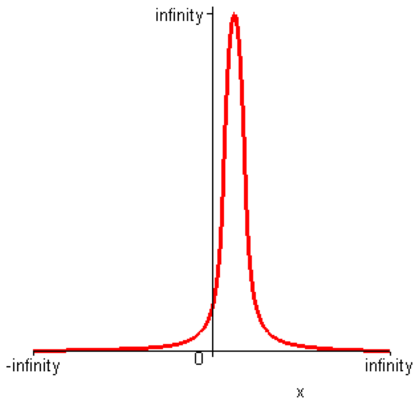
Gambar 20

Menggunakan table di atas atau Gambar 20, maka nilai fungsi *f(x)* menuju tak hingga (∞) untuk *x* mendekati 1 dari kanan, sedangkan menuju minus tak hingga (-∞) untuk *x* mendekati 1 dari kiri. Pengertian tersebut dapat dinotasikan dengan limit sebagai berikut, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad dan \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$

Bila $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ maka nilai fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati 1 darin arah kanan maupun arah kiri diberikan pada table berikut,

x	...	0,9	0,99	0,999	....	1	...	1,001	1,01	1,1	...
f(x)	...	100	10000	1000000	...	**td**	...	1000000	10000	100	…

Catatan: td = tidak terdefinisi



Gambar 21

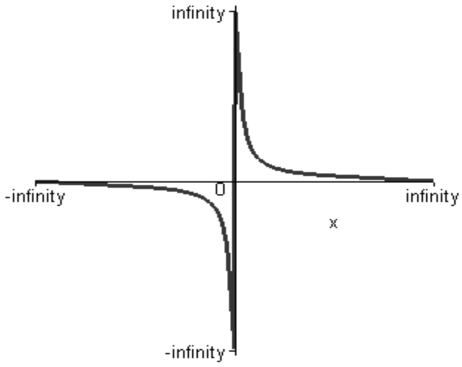
Menggunakan tabwel di atas atau Gambar 21, maka didapatkan nilai limit kiri dan limit kanan dari fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati 1 yaitu $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$. Karena nilai limit kanan dan nilai limit kiri dari *f(x)* di *x* = 1 sama maka nilai limit fungsi *f(x)* di *x* = 1 ada dan dituliskan $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$. Bentuk limit tersebut dinamakan **limit tak hingga**, yaitu nilai fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati 1 sama dengan tak hingga (∞).

Misal diberikan limit berikut, $\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$. Nilai dari pembilang untuk *x* mendekati 3 dari arah kanan adalah mendekati 6, sedangkan nilai penyebut akan mendekati negatif bilangan yang sangat kecil. Bila 6 dibagi oleh bilangan negatif kecil sekali akan menghasilkan bilangan yang sangat kecil. Jadi $\lim_{x\to 3^+}\frac{3+x}{3-x} = -\infty$.

18 Limit di Tak Hingga

Bentuk limit di titik mendekati tak hingga diilustrasikan berikut. Misal diberikan fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$, maka nilai fungsi *f(x)* untuk beberapa nilai *x* diberikan pada tabel berikut.

x	1	10	100	1000	10000	10^5	10^6	...
f(x)	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	10^{-5}	10^{-6}	...

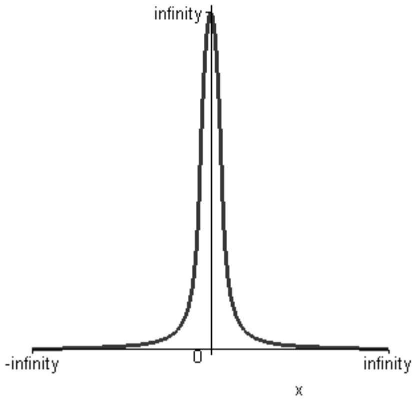


Gambar 22

Dari table dia atas atau Gambar 22, untuk nilai *x* semakin besar (cukup besar = menuju tak hingga) maka nilai fungsi akan mendekati nol. Hal ini dikatakan limit dari fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati tak hingga ada (sama dengan nol) dan dinotasikan: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$. Sedangkan untuk *x* semakin kecil (cukup kecil = menuju minus tak hingga) maka nilai fungsi *f(x)* juga akan menedekati nol. Hal ini dikatakan limit dari fungsi *f(x)* untuk *x* mendekati tak hingga ada dan dinotasikan: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$. Grafik fungsi *f(x)* yang ditunjukkan pada Gambar 22, nampak nilai fungsi $f(x)=\frac{1}{x}$ menuju nol untuk *x* semakin besar atau semakin kecil.

Bila diberikan fungsi $f(x)=\frac{1}{x^2}$ maka nilai fungsi *f(x)* untuk *x* semakin besar dan semakin kecil diberikan pada tabe; berikut.

x	±1	±10	±100	±1000	±10000	$\pm10^5$	$\pm10^6$	...
f(x)	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	10^{-5}	10^{-6}	...



Gambar 23

Grafik fungsi $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ditunjukkan pada Gambar 23. Dengan menggunakan tabel di atas atau Gambar 23 maka dapat disimpulkan bahwa nilai limit fungsi $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ada dan sama dengan nol untuk *x* menuju tak hingga atau minus tak hingga, dinotasikan dengan, $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$ dan $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$. Secara umum, limit fungsi dari $f(x)=\frac{1}{x^n}, n\in B^+$ untuk *x* mendekati tak hingga atau minus tak hingga sama dengan nol, dituliskan dengan (1) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)=0$ dan (2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)=0$.

Bila *f(x)* merupakan fungsi rasional, misal $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ dengan *p(x)* dan *q(x)* merupakan polinom maka untuk menyelesaikan limit di tak hingga dari *f(x)* dilakukan dengan cara sebagai berikut,

- Untuk Pangkat *p(x)* ≤ pangkat *q(x)* . Dilakukan dengan membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat *x* pangkat tertinggi yang terjadi di penyebut.
- Untuk Pangkat *p(x)* > pangkat *q(x)*. Dilakukan dengan membagi pembilang dengan penyebut terlebih dahulu sehingga diperoleh suku rasional dengan pangkat pembilang kurang dari atau sama dengan pangkat penyebut, kemudian baru ditentukan nilai limitnya.

Berikut cara menerapkan metode di atas. Untuk menghitung limit $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2}{x^2-3x+1}\right)$, caranya bagilah fungsi pembilang dengan fungsi penyebut. **Berapakah hasil yang diperoleh?** Hasil yang Anda peroleh mestinya berupa dua suku. Suku pertama berupa polinom dan suku kedua berupa fungsi rasional. Masing-masing Anda hitung limitnya, hasilnya anda jumlahkan sehingga ketemu nilai limit tersebut. **Bagaimana detail perhitunggannya?**

Beberapa pengertian dari nilai mutlak dapat diterapkan untuk menghitung limit fungsi seperti $\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{\sqrt{4x^2+1}}$ dan $\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{\sqrt{4x^2+1}}$. **Sifat nilai mutlak yang mana yang digunakan untuk menyelesaikan limit teserbut? Jelaskan. Selanjutnya hitung nilai limit tersebut.**